

ANNALEN DER PHYSIK.

VIerte Folge. Band 61.

1. I. Das skalare Gravitationspotential; von Ernst Reichenbächer.

1. Abschnitt.

Wie entsteht die Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit durch die Gravitation im allgemeinsten Falle?

Die Gravitationswirkungen werden bekanntlich nach der Einsteinschen Theorie aus der Annahme eines von der gewöhnlichen Euklidisch-Minkowskischen Maßvorschrift verschiedenen und auch nicht aus ihr durch Transformation herleitbaren Ansatzes für das Linienelement der vierfach ausgedehnten Raumzeitmannigfaltigkeit abgeleitet, wobei die 10 Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ dieses Ansatzes als Gravitationspotentiale aufgefaßt werden. Hierbei ergibt sich die Massendichte im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anschauung nicht als Skalar, sondern als 44-Komponente eines 16gliedrigen Tensors, dessen andere Komponenten allerdings ihr gegenüber sehr klein sind. Dies und die Tatsache, daß die $g_{\mu\nu}$ wegen ihrer Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems einer freilich eingeschränkten Willkür unterworfen sind, hat mich in der Einsteinschen Theorie nicht befriedigt, und ich habe deshalb in meiner Arbeit: „Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation“¹⁾ versucht, die Theorie eines skalaren Gravitationspotentials, das ich mit der Lichtgeschwindigkeit identifizierte, aufzustellen, wobei ich an bestimmte Voraussetzungen über die Gravitationserregung durch die Elektronen anknüpfte, die ich — positive und negative — als das einzig Materielle ansah. Den einfachsten Fall der Verzerrung einer ohnedies Minkowskischen Mannigfaltigkeit durch die Gravitation eines einzigen Elektrons hatte ich dabei erledigt und nach Analogie dieses Falles allgemein die Gleichung²⁾

$$(1) \quad \mathfrak{R} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg I$$

1) Ann. d. Phys. 52. S. 134. 1917.

2) A. a. O. S. 168. Gl. (76), S. 169. (Gl. 77), desgl. im Nachtrag S. 176. Gl. (VII).

aufgestellt. Es fehlte aber der Beweis für diesen Analogieschluß, der insbesondere auf den Nachweis der Möglichkeit dieses Ansatzes 1 hinausläuft und in folgendem geführt werden soll.

Es ist im allgemeinen Falle zu erörtern, wie die Gravitationswirkung eines weiteren Elektrons oder Anziehungsmittelpunktes verzerrend auf die Raumzeitmannigfaltigkeit einwirkt, die ihrerseits selbst schon ohnedies durch die Gravitation von beliebig vielen anderen Elektronen umgebildet ist. Dies Einführen einer „neuen“ Verzerrung soll nun aber nicht etwa bedeuten, daß nun irgendwo und irgendwann ein neues Elektron plötzlich entstehen und das vorhandene Feld umbilden könnte, sondern geschieht nur zu dem Zwecke einer vollständigen Induktion, eines Schlusses von n auf $n + 1$. Es kann also nun kein Zweifel darüber herrschen, daß ich mit den Ausdrücken „vor“ und „nach“ der Verzerrung durch die Gravitation des „neuen“ Elektrons keine zeitlichen Beziehungen meine. Die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung ist, wie eben gesagt, schon nicht mehr Minkowskisch, da sie ja schon durch die übrigen Elektronen umgebildet ist; es soll aber für sie die Gültigkeit der Gleichung (1) gefordert werden, was für ein einziges solches Elektron möglich ist, wie ich in meiner Arbeit gezeigt habe, sogar auch für den von Einstein geforderten Fall der Verzerrung des Ruhraumes des gravitierenden Zentrums, wobei die Perihelwanderung die doppelte ist wie in dem sonst von mir zugrunde gelegten Fall.¹⁾

Die Gravitation des neuen Elektrons äußert sich natürlich in einer Änderung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ in dem Ausdruck für das Linienelementquadrat in der Mannigfaltigkeit, wie er vor der Verzerrung bestand. Diese Änderung wird sich nun wieder am leichtesten für ein Koordinatensystem berechnen lassen, dessen Lage dem mit räumlichen Polarkoordinaten in dem in meiner Arbeit erledigten Falle entspricht, wo die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung Minkowskisch war. Ein solches Koordinatensystem konstruiere ich folgendermaßen: In allen Punkten der Weltlinie (besser Mittellisogone) des verzerrenden Elektrons errichte ich die orthogonalen geodätischen Linien; die zu je einem Punkte gehörigen bilden

1) A. a. O. Nachtrag S. 176. Gl. (VI) und S. 177. Gl. (X).

eine räumliche Mannigfaltigkeit, die man als jeweiligen Raum des Elektrons bezeichnen kann. Die Schar der orthogonalen Trajektorien dieser Räume wird dann einer Verzerrung unterworfen, deren Betrag nur von ihrem geodätisch gemessenen Abstand von der Mittelisogone abhängen wird. Dies ist deshalb möglich, da sich dieser Abstand nicht ändert, wenn man eine solche Trajektorie durchläuft; denn diese liegt gänzlich in einem Parallelraum zur Mittelisogone, den man erhält, wenn man auf allen geodätischen Linien von dieser Isogone aus gleiche Stücke abträgt. Da dieser Parallelraum auf allen geodätischen Linien senkrecht steht, bildet er auch mit den Räumen rechte Winkel und enthält also die Trajektorien in ihrer ganzen Ausdehnung. Sämtliche Parallelräume — die übrigens mit Zylindern verglichen werden können — bilden mit den geodätischen Linien ein sogenanntes Gaußsches Koordinatensystem¹⁾, während die Trajektorien mit dem — den Ebenen unseres Raumes analogen — Räumen ein halborthogonales System zusammensetzen, in dessen L. E. Q.²⁾

$$(2) \quad ds^2 = g_{00} dx^0{}^2 + \sum_1^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

g_{00} im allgemeinen nicht nur von x^0 , sondern auch von den anderen Koordinaten abhängen wird; da die Trajektorien keine geodätischen Linien zu sein brauchen.

Durch die Gravitation unseres Elektrons sollen nun die Trajektorien verzerrt, dagegen die Räume im Verfolg meiner Annahme im Gegensatz zur Einsteinschen, die ich später daraufhin zu untersuchen vorhabe, unverzerrt bleiben. Dagegen kann das in ihnen liegende dreifache Koordinatensystem und zwar für jeden Raum anders transformiert werden, so daß das L. E. Q. die Gestalt erhält:

$$(3) \quad ds^2 = g_{00} dx^0{}^2 + \sum_1^3 g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu.$$

(Durch die Apostrophe sollen alle Größen nach der Verzerrung

1) Vgl. wegen dieser Bezeichnung Hilbert, Gött. Nachr. 1917, S. 58f.

2) Abkürzung für Linien-Element-Quadrat.

von den entsprechenden vor ihr unterschieden werden.) Dies wird durch folgende Gleichungen erreicht:

$$(4) \quad dx^0 = I dx'^0,$$

$$(5) \quad dx^e = \sum_{\mu}^3 a_{\mu}^e dx'^{\mu} \quad (e = 1, 2, 3)$$

Damit im Ruhraum keine Verzerrung, sondern nur eine Transformation eintritt, muß das System (5) integrabel sein, d. h. es muß für alle e, μ, ν von 1 bis 3 sein:

$$(6) \quad \frac{\partial a_{\mu}^e}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial a_{\nu}^e}{\partial x'^{\mu}}.$$

Statt dieser Gleichungen kann ich auch die inversen fordern, die aus den Umkehrungen

$$(7) \quad dx'^{\mu} = \sum_e^3 a_e^{\mu} dx^e \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

von (5) folgen und lauten [für alle μ, e, σ von 1 bis 3]:

$$(8) \quad \frac{\partial a_e^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial a_{\sigma}^{\mu}}{\partial x^e};$$

Denn aus der Integrabilität des Systems (5) folgt die des Systems (7). Dabei sind die a_e^{μ} die durch die Determinante a der Matrix der Koeffizienten a_{μ}^e geteilten Unterdeterminanten dieser Matrix.

Aus den Gleichungen (5) und (7) folgen die Beziehungen für die Komponenten der Fundamentaltensoren:

$$(9) \quad g'_{\mu\nu} = \sum_e^3 a_{\mu}^e a_{\nu}^e g_{e\sigma}, \quad (10) \quad g'^{\mu\nu} = \sum_e^3 a_e^{\mu} a_e^{\nu} g^{e\sigma},$$

$$(11) \quad g_{e\sigma} = \sum_{\mu\nu}^3 a_{\mu}^e a_{\nu}^{\sigma} g'_{\mu\nu}, \quad (12) \quad g^{e\sigma} = \sum_{\mu\nu}^3 a_{\mu}^e a_{\nu}^{\sigma} g'^{\mu\nu}.$$

Ferner ergibt sich für die ko- und kontravariante Differentiation:

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} = a_{\mu}^e \frac{\partial f}{\partial x^e}, \quad (14) \quad g'^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^{\nu}} = a_e^{\mu} g^{e\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^{\sigma}};$$

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial x^e} = a_e^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}}, \quad (16) \quad g^{e\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^{\sigma}} = a_{\mu}^e g'^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^{\nu}}.$$

für jede beliebige Funktion f . (Die Summenzeichen, die sich über die doppelt auftretenden Indizes von 1 bis 3 erstrecken, sind hier nach Einsteins Vorbild weggelassen.)

Skalare Ausdrücke, wie

$$g^{e\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x^e} \frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^e} \sqrt{g} g^{e\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma}$$

blieben natürlich unverändert (g ist die Determinante der $g_{\mu\nu}$ von μ, ν gleich 1 bis 3).

Dabei ist zu beachten, daß zwar sowohl die $g_{e\sigma}$, wie die a_μ^e die Veränderliche x^0 enthalten können, daß aber bei Einbeziehung des Index 0 in den Bereich der μ, ν, e, σ sofort die Integrabilität aufhört. Darin liegt das Wesen der Verzerrung gegenüber der bloßen Transformation.

Für die 0-Koordinate erhält man zunächst aus Gleichung (4) die Beziehung:

$$(17) \quad \frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{1}{I} \frac{\partial f}{\partial x'^0},$$

$$(18) \quad g'_{00} = I^2 g_{00},$$

$$(19) \quad g'^{00} = \frac{1}{I^2} g^{00}.$$

Es ist klar, daß man die umgekehrte Verzerrung, die die direkte gerade aufhebt, durch die Einsetzung der Größe $I' = 1/I$ statt I charakterisieren muß.

Bei der Verzerrung können die skalaren Größen im allgemeinen nicht unverändert bleiben; man erhält zwar für

$$\sum_0^3 \mu\nu g'^{\mu\nu} \frac{\partial f_1}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f_2}{\partial x'^\nu}$$

denselben Wert wie für

$$\sum_0^3 e\sigma g^{e\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x^e} \frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma},$$

da dieser Ausdruck für die Indizes 1 bis 3 sich nicht ändert und für den Index 0 nur der Summand $g'^{00} \frac{\partial f_1}{\partial x'^0} \frac{\partial f_2}{\partial x'^0}$ hinzutritt, der wegen Gleichung (17) und (19) mit $g^{00} \frac{\partial f_1}{\partial x^0} \frac{\partial f_2}{\partial x^0}$ übereinstimmt. Dies trifft aber für den Laplaceschen Operator, d. h. die Divergenz des Gradienten, nicht mehr zu.

Zunächst erhält man für die Fundamentaldeterminante $G = g \cdot g_{00}$ nach der Verzerrung:

$$(20) \quad G' = g'_{00} g' = g_{00} l^2 \cdot g \cdot a^2 = l^2 \cdot a^2 \cdot G.$$

Dann sondere man aus der Divergenz des Gradienten wieder den auf den Index 0 bezüglichen Summanden aus:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Div Grad } f &= \sum_0^3 g^{\sigma\sigma} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{G} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G} g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &\quad + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} \frac{1}{\sqrt{g \cdot g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g \cdot g_{00}} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \\ \text{Div Grad } f &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G} g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \\ &\quad + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g} \cdot g^{\sigma\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \end{aligned} \right.$$

Der letzte Summand ist der Laplacesche Operator $\text{div grad } f$ für die drei Indizes 1 bis 3, der bei der Verzerrung, die für diese eine bloße Transformation ist, ungeändert bleibt. Man erhält also für alle vier Ausdehnungen nach der Verzerrung:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Div Grad}' f &= \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial}{\partial x'^0} \sqrt{G'} g'^{00} \frac{\partial f}{\partial x'^0} \\ &\quad + \sum_1^3 g'^{\mu\nu} g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g'_{00}}}{\partial x'^\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} + \text{div grad}' f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G} \cdot a \cdot l} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G} a g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &\quad + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial \lg (\sqrt{g_{00}} \cdot l)}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} + \text{div grad } f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G} g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &\quad + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \\ &\quad + \text{div grad } f. \\ \text{Div Grad}' f &= \text{Div Grad } f + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &\quad + \sum_1^3 g^{\sigma\sigma} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} \end{aligned} \right.$$

Der Einfluß der Verzerrung auf die skalare Krümmung $\mathfrak{R} = g^{\sigma\sigma} K_{\sigma\sigma}$ macht für seine Untersuchung umfangreichere Vorarbeiten nötig, die im nächsten Abschnitt erledigt werden sollen.

2. Abschnitt.

Vergleich der Krümmung einer Mannigfaltigkeit mit der einer in ihr gelegenen Untermannigfaltigkeit, die eine Ausdehnung weniger besitzt.

Da bei der Verzerrung die Ruhräume nicht verändert werden und also auch ihre Krümmung erhalten bleibt, liegt der Gedanke nahe, die Gesamtkrümmung auf eine Formel zu bringen, die diese Teilkrümmung enthält. Um dies auszuführen, soll jedoch für erstere zunächst ein wesentlich kürzerer Ausdruck hergeleitet werden.

Nach Einstein¹⁾ hat man

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} + g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} \\ &\quad + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda} \end{aligned} \right.$$

und

$$(2) \quad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = - \left(g^{\mu\tau} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ \nu \end{matrix} \right\} + g^{\nu\tau} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} \right) = -g^{\mu\tau} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\nu\tau} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right\}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= - \frac{\partial g^{\mu\tau}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \frac{\partial g^{\nu\tau}}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right\} \\ &\quad - g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

und hieraus nach (2) und der Einsteinschen¹⁾ Gleichung (34):

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= g^{\sigma\tau} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} + g^{\mu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} \\ &\quad - g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} + g^{\sigma\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} + g^{\nu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right\} \\ &\quad - g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \nu\tau \\ \mu \end{matrix} \right\} \end{aligned} \right.$$

1) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49. 1916: S. 801. F. 44; S. 796. F. 34, 29a.

Aus (2) erhält man durch Änderung der Indizes:

$$\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -g^{\lambda\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\},$$

daher

$$(4) \quad g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}.$$

Ebenso aus (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda} \\ &\quad - g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\lambda \\ \kappa \end{matrix} \right\} - g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Hierin setze man den Wert für $g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\}$ aus (4) ein und streiche $g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}$ gegen $-g^{\lambda\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$,

während in $-\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$ μ statt λ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\lambda \\ \kappa \end{matrix} \right\} \\ &\quad - g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man nach Division durch (2):

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} + g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\lambda \\ \kappa \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Diesen Wert, sowie $g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\}$ (aus (4) mit μ statt λ rechts), setze man in (1) ein:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &\quad + g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{3}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ & + g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right),$$

d. h. nach (4) mit λ statt λ und nach Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \\ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \end{aligned}$$

Dies setze man in (5) ein und ziehe zusammen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} = & \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + 2 g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ & + g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \end{aligned} \right.$$

Da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu} \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= \sqrt{G} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{G} \left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right. \\ &\quad \left. + g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned}$$

ist, kann man der Gleichung (6) auch die Gestalt geben:

$$(7) \quad \left\{ \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu} \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} \\ + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \text{Div Grad } \lg \sqrt{G},$$

also

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K} &= 2 \text{ Div Grad } \lg \sqrt{G} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}. \end{aligned} \right.$$

Endlich ist

$$\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} G)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{g^{\mu\nu} \sqrt{G}} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu} \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ - \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

daher nach: (7)

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K} &= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} G)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right]. \end{aligned} \right.$$

In den Gleichungen (6) bis (9) hat man natürlich alle Summanden mit μ, ν, κ von 0 bis 3 zu bilden und diese zu addieren. Da nur ein einziges Glied mit drei Indizes vorliegt, ist der Ausdruck von \mathfrak{K} gegenüber der Gleichung (1) sehr vereinfacht.

Die allgemeine Gleichung (9) wende ich nun auf ein halborthogonales System an, in dem g_{01}, g_{02}, g_{03} verschwinden. In diesem ist dann wie im Abschnitt 1 die Determinante $G = g_{00} \cdot g$. Nun scheide ich aus der allgemeinen Summe den einzigen Summanden mit dem Index 0 aus und erhalte:

$$\mathfrak{K} = g^{00} \left[\frac{\partial^2 \lg g^{00} g g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \left(\frac{\partial \lg (g^{00} \sqrt{g g_{00}})}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_0^3 \left\{ \begin{matrix} 00 \\ \kappa \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg g^{00}}{\partial x^\kappa} \right] \\ + \sum_1^3 g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} g g_{00})}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g g_{00}})}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g g_{00}})}{\partial x^\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_0^3 \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right].$$

Es ist aber

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 00 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 00 \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \sum_{\epsilon} g^{\kappa\epsilon} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\epsilon}},$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \kappa, \mu, \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = & \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\epsilon} g^{\kappa\epsilon} g_{00} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\epsilon}} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\kappa}} \right] \\ & + \sum_{\epsilon}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\mu}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{4g_{00}} \frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\ & + \sum_{\epsilon}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\nu}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\epsilon}^{\mu\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\nu \\ \kappa \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right]. \end{aligned}$$

In der letzten Doppelzeile steht offenbar wieder der Ausdruck für die Krümmung nach Gleichung (9), aber beschränkt auf μ, ν, κ gleich 1 bis 3, also die Krümmung \mathfrak{f} der dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit $x_0 = \text{const.}$ Im zweiten und dritten Gliede der vorletzten Doppelzeile ist μ und ν vertauschbar; ferner ist κ und ϵ durch μ und ν zu ersetzen:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K} = \mathfrak{f} + & \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \sum_{\epsilon}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\ & + \sum_{\epsilon}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^{\nu}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \\ &\quad + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^\nu} \right].\end{aligned}$$

Setzt man dies in (10) ein, so erhält man:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K} &= \mathfrak{f} + \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\ &\quad + \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung, die die Krümmung der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf die in ihr enthaltene dreifache zurückführt, ist natürlich entsprechend auch auf Mannigfaltigkeiten von beliebigen vielen Ausdehnungen anzuwenden. Sie enthält neben der Funktionaldeterminante g der Untermannigfaltigkeit noch die Ergänzungskomponente g_{00} und den Ausdruck

$$- \frac{1}{4 g_{00}} \sum_{\mu, \nu}^3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0};$$

von den Koordinaten tritt nur x^0 selbständig auf, die anderen drei dagegen in den Skalaren $\operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00}$ und

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Ist das halborthogonale System ein Gaußsches, in dem g_{00} nur von x^0 abhängen darf und einer Konstanten 1 gleichgesetzt werden kann, so erhält man insbesondere:

$$(12) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{f} + \frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}.$$

Man kann übrigens die Formel (11) durch Einführung der Komponente K_{00} des Krümmungstensors noch vereinfachen. Aus der allgemeinen Gleichung [vgl. (1)]:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\lambda \\ \kappa \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$$

erhält man für $\mu = \nu = 0$:

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\kappa\sigma} \left[\begin{matrix} 00 \\ \sigma \end{matrix} \right] + g^{\lambda e} \left[\begin{matrix} 0\kappa \\ e \end{matrix} \right] \cdot g^{\sigma\sigma} \left[\begin{matrix} 0\lambda \\ \sigma \end{matrix} \right] + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^\sigma)^2} \\ - g^{\lambda e} \left[\begin{matrix} 00 \\ e \end{matrix} \right] \cdot \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}.$$

Wegen $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ ist

$$\left[\begin{matrix} 00 \\ 0 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}, \quad \left[\begin{matrix} 00 \\ \mu \end{matrix} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}, \quad \left[\begin{matrix} 0\mu \\ 0 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu},$$

$$\left[\begin{matrix} 0\mu \\ \nu \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \mu, \nu \neq 0.$$

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left[g^{\kappa\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} (\delta_\sigma^0 - \frac{1}{2}) \right] + \frac{1}{4} g^{\lambda e} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\lambda e}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0} \\ - \frac{1}{4} g^{\lambda e} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^e} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} - \frac{1}{4} g^{\kappa\sigma} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} + \frac{1}{2} (g^{00})^2 \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 \\ + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\lambda e} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^e} (\delta_e^0 - \frac{1}{2}) \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda};$$

$$\delta_\sigma^0 = 0 \text{ für } \sigma \neq 0, = 1 \text{ für } \sigma = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichung (2) erhält man hieraus, da $g_{\kappa e} g^{\kappa\sigma} = \delta_e^\sigma$ ist:

$$K_{00} = \left[g^{\tau\kappa} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\kappa} + g^{\tau\nu} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right] \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} (\delta_\sigma^0 - \frac{1}{2}) - g^{\kappa\sigma} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^\kappa} (\delta_\sigma^0 - \frac{1}{2}) \\ - \frac{1}{4} g^{\lambda e} g_{\kappa e} \frac{\partial g^{\kappa\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} g^{\lambda e} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^e} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 \\ + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\tau\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} (\delta_\sigma^0 - \frac{1}{2}) \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau},$$

$$K_{00} = g^{\tau\nu} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ 0 \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} g^{\tau\nu} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} - g^{00} \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^\kappa} \\ - \frac{1}{4} \frac{\partial g^{\kappa\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} g^{\lambda e} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^e} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 \\ + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2}; \quad g^{\tau\nu} \left\{ \begin{matrix} \tau\nu \\ 0 \end{matrix} \right\} = -\frac{\partial g^{00}}{\partial x^0} - g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0}$$

nach Gleichung (4), desgleichen

$$\begin{aligned}
 g^{\sigma\tau} \left\{ \begin{matrix} \tau\sigma \\ \sigma \end{matrix} \right\} &= -g^{\sigma\tau} \frac{\partial \lg(g^{\sigma\tau} \sqrt{G})}{\partial x^\sigma}; \\
 K_{00} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} g_{00} g^{1e} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^e} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^1} + \frac{1}{2} g^{1e} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^e \partial x^1} - \frac{1}{4} \frac{\partial g^{\mu\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^0} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \frac{\partial \lg g^{\sigma\tau} \sqrt{G}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}; \\
 g^{00} K_{00} &= \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - \frac{2}{g_{00}} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} + \frac{2}{g_{00}} \left(\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{2}{g_{00}} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{4 g_{00}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g^{\mu\nu} \sqrt{G}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}; \\
 g^{00} K_{00} &= \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} - 2 \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu} \sqrt{G})}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \right); \\
 &= \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - 2 \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} \right) \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \right]; \\
 &= \frac{1}{2 g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^3 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}.
 \end{aligned}$$

Daher erhält man entweder

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} - \mathfrak{I} - g^{00} K_{00} &= \frac{1}{2 g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{g x^0} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \end{aligned} \right.$$

oder

$$(14) \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{I} - 2 g^{00} K_{00} = \frac{1}{4 g_{00}} \left[\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 + \sum_{\mu, \nu}^3 \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right].$$

Im Falle des Gaußschen Systems wird einfach (für $g_{00} = 1$):

$$(15) \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{I} - K_{00} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2}.$$

3. Abschnitt.

Der Einfluß der Verzerrung auf das Krümmungsmaß.

Nun sind alle Vorbereitungen erledigt, um die Änderung des Krümmungsmaßes durch die Verzerrung bestimmen zu können. Wendet man die Gleichung (11) des vorigen Abschnittes auf die verzerrte Mannigfaltigkeit an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}' = \mathfrak{I}' + \frac{1}{g_{00}'} \left[\frac{\partial^2 \lg g'}{(\partial x'^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^0} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x'^0} \right] + \operatorname{div} \operatorname{grad}' \lg g_{00}' \\ + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\nu}. \end{aligned}$$

Nach Früherem ist hierin

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}, \quad g_{00}' = g_{00} l^2, \quad \frac{\partial}{\partial x'^0} = l \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial^2}{(\partial x'^0)^2} = l^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}, \quad g' = g \cdot a^2,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}' = \operatorname{div} \operatorname{grad} \text{ und } g'^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

zu setzen. Man erhält also:

1) $\partial l / \partial x^0$ ist gleich 0 zu setzen, da die x_0 -Linien in die Räume konstanter Verzerrung fallen.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}' = & \mathfrak{I} + \frac{1}{g_{00}} \left[\mathfrak{I}^2 \frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \mathfrak{I}^2 \frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \mathfrak{I}^2 \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}^2 \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \right. \\
& + \frac{1}{4} \mathfrak{I}^2 \left(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{I}^2 \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \mathfrak{I}^2 \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \\
& \left. - \mathfrak{I}^2 \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^0} \right] - \mathfrak{I}^2 \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^0} - \frac{1}{4} \mathfrak{I}^2 \sum_{\mu\nu}^3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} \\
& + \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + 2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg \mathfrak{I} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \\
& + 2 \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} + 2 \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu}.
\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Gleichung (2, 11) findet man dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}' = & \mathfrak{R} + \frac{1}{g_{00}} \left[\mathfrak{I}^2 \frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right) \right] \\
& + 2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg \mathfrak{I} + 2 \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} \\
& + 2 \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann dadurch vereinfacht werden, daß man die Gleichungen (21) und (22) des Abschnitts 1 auf die Funktion $f = \lg \mathfrak{I}$ anwendet. Danach erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{Div} \operatorname{Grad}' \lg \mathfrak{I} &= \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \mathfrak{I} + 2 g_{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^0} \\
&+ \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G} g^{00} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^0} + \sum_{\mu\nu}^3 \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} \\
&+ \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg \mathfrak{I}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Div} \operatorname{Grad}' \lg \mathfrak{I} &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg \mathfrak{I} + \sum_{\mu\nu}^3 \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu} \\
&+ \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \mathfrak{I}}{\partial x^\nu}.
\end{aligned}$$

1) Vgl. Anmerkung auf S. 15.

Setzt man dies in die Gleichung für \mathfrak{K}' ein, so erhält man:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}' &= \mathfrak{K} + \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \right)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \left. - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 \left[\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right) \right] + \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu} \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad}' \lg l \right. \end{aligned} \right.$$

Nun nehme ich an, daß vor der Verzerrung meine Behauptung richtig sei, die Krümmung \mathfrak{K} also die Gestalt habe:

$$(2) \quad \mathfrak{K} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A}^1);$$

dann ist nach Gleichung (1, 22):

$$\mathfrak{K} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad}' \mathfrak{A} - 4 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0} \\ - 2 \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{K}' = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad}' (\mathfrak{A} + \lg l) + \frac{1}{g_{00}} \left[2 \frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - 2 \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0} \right] \\ - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu}^3 \left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right) \\ + \sum_{\mu\nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} - 2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu} \right).$$

Soll nun die Behauptung richtig sein, daß auch

$$(3) \quad \mathfrak{K}' = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad}' \mathfrak{A}'$$

werde, so kann das nur der Fall sein, wenn

$$(4) \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \lg l$$

wird, wie ich das im Nachtrag meiner Arbeit vorausgesagt

1) Die Bezeichnung entspricht der Gleichung (VI) auf S. 176 meiner Annalenarbeit.

habe.¹⁾ Es muß aber außerdem die Bedingung erfüllt sein, daß die Zusatzglieder verschwinden. Es muß also

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu, \nu}^3 g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} - 2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu}^3 \left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right) - \frac{1}{g_{00}} \left[2 \frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - 2 \frac{\partial \lg a}{\partial x^0} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0} \right] \end{aligned} \right.$$

sein. Das kann man durch die bisher offen gelassene Wahl der Koeffizienten a_μ^e erreichen. Diese waren an die Bedingung (1,6) oder (1,8) geknüpft:

$$\frac{\partial a_\mu^e}{\partial x^\nu} = \frac{\partial a_\nu^e}{\partial x^\mu}, \quad \frac{\partial a_\mu^{\prime\mu}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial a_\sigma^{\prime\mu}}{\partial x^\mu}.$$

Aus diesen geht hervor, daß es sich im ganzen um drei voneinander unabhängige Funktionen handelt, deren partielle Ableitungen die a oder a' sind. Natürlich sind dies die transformierten Koordinaten, da $a_\mu^{\prime\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu}$ ist.

Mit diesen drei Funktionen läßt sich drei Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Eine davon ist die Gleichung (5); eine zweite ergibt sich daraus, daß die Differenz $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$ einen vorgeschriebenen, von der geodätischen Entfernung r von der Mittellisogone allein abhängigen Wert annehmen muß, der im Außenraum, wo diese Entfernung größer als der Elektronenradius ist, gleich 0, im Innenraum aber nach meiner bisherigen Annahme²⁾ gleich $\frac{6\varrho^2 + 4r^2}{(\varrho^2 + r^2)^2}$ wird — ϱ ist der Krümmungs-

1) Vgl. den Nachtrag zu meiner Annalenarbeit, S. 176. Gl. (VIII).

2) A. a. O. S. 150f. Ich möchte hieran die Bemerkung knüpfen, daß es auch möglich ist, diese Größe, deren Veränderlichkeit wegen der Kleinheit von r gegenüber ϱ verschwindend gering ist, genau konstant, also gleich dem Werte $6/\varrho^2$ im Mittelpunkt zu machen, wenn

man im Innenraume l nicht mehr gleich $\frac{1}{k_0} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\varrho^2}}$, sondern gleich

$\frac{\varrho}{2r k_0 \sqrt{3}} \left(e^{\sqrt{3} \frac{r}{\varrho}} - e^{-\sqrt{3} \frac{r}{\varrho}} \right)$ setzt. Außerhalb bleibt der Ansatz

$l = 1 - c_1/r$ nach Analogie meiner Gleichung (37) auf S. 154 unverändert.

radius des Elektronenraumes, der von dem von mir mit a bezeichneten Radius der Elektronenkugel zu unterscheiden ist.¹⁾

Da im Rahmen meiner Theorie nur die Gleichung (5), sowie die Vorschrift über das Krümmungsmaß notwendig sind, bleibt für die dritte Bedingungsgleichung eine gewisse Willkür bestehen. Ich will sie nun so aufstellen, daß die Verhältnisse möglichst einfach werden, und da empfiehlt sich die Annahme der Unabhängigkeit der Transformationsdeterminante a von x^0 , da dann die letzte Klammer der Gleichung (5) ganz fortfällt. Wenn a nur noch von x^1, x^2, x^3 abhängt, kann es ja bekanntlich konstant, insbesondere gleich 1 gemacht werden, und dies bedeutet, daß durch die Verzerrung das Volummaß im Raum nicht geändert wird. Dagegen kann dasselbe nicht von dem Längenmaß in den einzelnen Richtungen gesagt werden, da sonst a^2_{μ} bei gleichen Indizes 1 und bei ungleichen 0 werden müßte; die Verzerrung ist also anisotrop, und es kann auch nicht mehr von der Lichtgeschwindigkeit als dem Verhältnis des Längen- zum Zeitmaße gesprochen werden. Es läßt sich aber gerade bei Annahme der Bedingung $a = 1$ dafür Ersatz durch Einführung eines mittleren Längenmaßes gewinnen, wobei jedes Streckenelement gleich der Kubikwurzel aus dem durch die Fundamentaldeterminante g geteilten Volumelement ist, und dieses mittlere Maß wird durch die Verzerrung nicht verändert.

Damit und durch die sogleich zu erörternden Grenzbedingungen sind alle Größen festgelegt. Zunächst ist r als Funktion von x^1, x^2, x^3 definiert, da es die Länge der auf der Mittellisogone senkrechten geodätischen Linien mißt, die mit dem zu ihnen orthogonalen zylindrischen Parallelräumen das Gaußsche Koordinatensystem bilden. Dieses aber ist in dasjenige halborthogonale System der $x^0 x^1 x^2 x^3$ zu transformieren, das mit ihm die $x^1 x^2 x^3$ -Räume der sämtlichen von einem Punkte der Mittellisogonen ausgehenden geodätischen Linien gemeinsam hat, auf welchen Räumen dann die x_0 -Linien senkrecht stehen. Als Funktion von r ist dann I mit verschiedenem Ansatz für Außen- und Innenraum gegeben, wobei die Konstanten wie auf S. 154 meiner Arbeit so zu bestimmen sind, daß I und dI/dr in der Grenz-

1) Vgl. a. a. O. S. 164f.

kugel des Elektrons stetig übergehen. Die übrigen mit a_μ bezeichneten Komponenten der Verzerrung oder ihre Kontravarianten a'^μ , bzw. deren Integrale x'^μ sind dann aus Gleichung (5), der Beziehung für $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$ außen und innen und der Gleichung $a = 1$ zu gewinnen. Dabei sind für den Außenraum die Grenzbedingungen dadurch gegeben, daß im Unendlichen die Verzerrung verschwindet, d. h. a_μ^e bei gleichen Indizes 1, bei ungleichen 0 wird. Die somit für den Außenraum gegebenen Werte der Komponenten a_μ^e nehmen auf der Grenzkugel des Elektrons Größen an, die wieder zur Aufstellung von Grenzbedingungen für den Innenraum führen. Damit sind sämtliche Komponenten völlig definiert, und zugleich ist der stetige Übergang von innen nach außen gesichert. Ich möchte nur noch ergänzend hinzufügen, wie der Ausdruck für die Summe über

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}$$

in Gleichung (5) mit Benutzung der Werte von $g'_{\mu\nu}$ und $g'^{\mu\nu}$ nach (1, 9) und (1, 10) auszuführen ist. Es wird nämlich:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} &= \frac{\partial a_\mu^e a_\nu^e g_{e\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial a'^\mu a'^\nu g'^{\sigma\varphi}}{\partial x^0} \\ - \frac{\partial g_{e\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{e\sigma}}{\partial x^0} &= 2 \frac{\partial a_\mu^e}{\partial x^0} \frac{\partial a^\mu}{\partial x^0} + 2 a_\mu^e a'^\nu g_{e\sigma} g'^{\sigma\varphi} \frac{\partial a_\nu^e}{\partial x^0} \frac{\partial a'^\mu}{\partial x^0} \\ &\quad + 4 a_\mu^e g'^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{e\sigma}}{\partial x^0} \frac{\partial a'^\mu}{\partial x^0} \end{aligned} \right.$$

Somit wäre durch eine vollständige Induktion gezeigt, daß sich das Krümmungsmaß \mathfrak{R} der Raumzeitmannigfaltigkeit ganz allgemein als doppelte Divergenz des Gradienten einer Größe \mathfrak{A} darstellen läßt, die ich als das skalare Gravitationspotential ansehe, und die sich als Logarithmus der veränderlichen Lichtgeschwindigkeit deuten läßt. Dabei ist aber wegen der Anisotropie der Verzerrung ein mittleres Längenmaß zu wählen und außerdem die Voraussetzung gemacht, daß die Verzerrung für den Ruhraum verschwindet.

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

2. II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation; von Ernst Reichenbächer.

Bekanntlich hat Einstein als eine durch die Erfahrung zu prüfende Folgerung seiner Gravitationstheorie die Krümmung eines an der Sonne tangential entlang streifenden Lichtstrahls im Gesamtbetrage von $1,7''$ festgestellt. Demgegenüber behauptet Eddington¹⁾, daß aus der Gravitationswirkung der Sonne auf die mit der Geschwindigkeit $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec bewegte Lichtenergie die Hälfte des Einsteinschen Effektes sich ergeben muß, wobei weiter keine Annahme zu machen ist, als daß die Wirkung auf einen Energiepunkt dieselbe ist wie auf einen Massenpunkt. Daraufhin will ich in Fortsetzung meiner Ausführungen in der Arbeit: „Theorie der Elektrizität und der Gravitation“, die in Heft 52 der Annalen der Physik 1917, S. 134ff., erschienen ist, prüfen, welche Krümmung des Lichtstrahls sich aus der dort entwickelten Theorie ergibt.

Ich hatte auf S. 157 als Gleichungen für einen der Gravitation unterworfenen Körper die drei folgenden aufgestellt (40 b):

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} : \left[1 - \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_r} \quad (r = 1, 2, 3)$$

Ersetzt man hierin den Nenner durch $g_0 \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2$, so lauten sie

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_r} \cdot g_0 \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial x_r} \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2.$$

In dieser Gestalt erkennt man sofort, daß es sich um die kürzesten Linien der Mannigfaltigkeit handelt, deren Linien-elementquadrat ja nach Gleichung (85) (S. 151)²⁾ durch

$$ds^2 = g_0 dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

1) Vgl. Naturwissenschaften 1919, Heft 20, S. 368.

2) Mit Ersatz der Polarkoordinaten durch Cartesische.

gegeben war. Aus diesem Grunde muß ich die Gleichungen (40 b) und ihre Folgerungen auch für den Lichtstrahl als gegeben annehmen mit der besonderen Maßgabe, daß für diesen ds gleich 0 werden muß. Nun ergeben sich aus (40 b) die drei folgenden:

$$\begin{aligned} x_3 &= \text{const.}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2Ai}{c} \quad (\text{Gl. 42}), \quad 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \\ &= \frac{B}{g_0} = \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r}\right)^2} \quad (\text{Gl. 43}) \quad \text{mit } x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Weil ds verschwindet, werden sowohl A als B unendlich, aber so, daß der Quotient $B/A^2 = \Gamma$ endlich bleibt. Danach erhält man nach (44) mit $k = 1/r$:

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4 \left(1 - \frac{b}{c^2 k}\right)^2}.$$

Dies ist die Gleichung der krummen ebenen Kurve, die das Licht infolge der Gravitation eines Zentrums beschreibt. Die Konstante b ist nach S. 160, Gleichung (49) und (50), fast genau gleich $\frac{4A^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, wo a und T mittlere Entfernung und Umlaufzeit eines das Zentrum umkreisenden Planeten sind, also gleich κM , dem Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des Zentrums. Da nun $k = 1/r$ im massefreien Äther höchstens den umgekehrten Wert $1/r_1$ des Radius des anziehenden Weltkörpers hat, kann man, wie ich das auch für die Planetenbewegung getan habe, wegen der Kleinheit des Ausdruckes $\frac{\kappa M}{c^2 r}$ die obige Differentialgleichung durch

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4} \left(1 + 2 \frac{b}{c^2} k + 3 \frac{b^2}{c^4} k^2\right)$$

ersetzen, deren Lösung auf S. 159 gegeben wurde:

$$k = \frac{1 + s \cos \lambda \varphi}{p}, \quad \frac{dk}{d\varphi} = -\frac{s \lambda}{p} \sin \lambda \varphi$$

mit [vgl. Gleichung (45), (46) f.]

$$\lambda^2 = 1 - \frac{3\Gamma b^2}{4c^4}, \quad \frac{\Gamma}{4} \frac{b p}{c^4} = 1 - \frac{\Gamma}{4} \cdot 3 \frac{b^2}{c^4}, \quad -\frac{\Gamma}{4} = \frac{\lambda^2}{p^2} (1 - s^2).$$

Durch Elimination von λ und p erhält man hieraus

$$\frac{\Gamma}{4} = \frac{c^4}{b^2 (2 + s^2)} = \frac{c^4}{\kappa^2 M^2 (2 + s^2)}.$$

Nun ist nach Gleichung (44), wobei $dk/d\varphi = 0$, also $k = 1/r_0$ gleich dem größten (oder kleinsten) Werte angenommen wird, den es erreicht, wenn der Lichtstrahl tangential verläuft:

$$\frac{I}{4} = \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{\kappa M}{c^2 r_0} \right)^2.$$

Durch Gleichsetzen beider Werte erhält man

$$\frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{\kappa M}{c^2 r_0} \right)^2 = \frac{c^4}{\kappa^2 M^2 (2 + \varepsilon^2)},$$

$$2 + \varepsilon^2 = \frac{c^4 r_0^2}{\kappa^2 M^2} \left(1 - \frac{\kappa M}{c^2 r_0} \right)^{-2}.$$

Ohne großen Fehler kann man wegen der Kleinheit von $\kappa M/c^2 r_0$ setzen

$$\varepsilon^2 = \frac{c^4 r_0^2}{\kappa^2 M^2}, \quad \varepsilon = \frac{c^2 r_0}{\kappa M}.$$

Die Bahn des Lichtstrahls ist also in sehr großer Annäherung eine Hyperbel mit sehr großer Exzentrizität um das anziehende Zentrum als Brennpunkt. Die Ablenkung des Lichtes von seinem Wege wird durch den spitzen Asymptotenwinkel χ gegeben, der durch $\sin \frac{1}{2} \chi = 1/\varepsilon$, also ungefähr $\chi = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2\kappa M}{c^2 r_0}$ bestimmt ist.

Dies wäre genau die Einsteinsche Gleichung (74) auf S. 822 (Ann. d. Phys. 49), da sein κ gleich dem $8\pi/c^2$ -fachen der gewöhnlichen Gravitationskonstanten ist [Gleichung (69), S. 818]. Aber Gleichung (74) enthält einen inzwischen berichtigten Fehler; nach Einstein wird die Ablenkung richtig als doppelt so groß angegeben, so daß sie nach seiner Theorie eben auch doppelt so groß erscheint wie nach der meinigen, die also das Eddingtonsche Ergebnis liefert. Dies kann nun wiederum nicht verwunderlich erscheinen, da ich in Übereinstimmung mit der bisher üblichen Annahme, aber im Gegensatz zu Einstein, den Raum der anziehenden Masse durch die Gravitation nicht verzerrt werden lassen wollte.

Andererseits muß man, wenn man die Eddingtonsche Begründung für die Ablenkung des Lichtstrahls für genügend hält, aber trotzdem an dem Grundsatz festhalten will, daß das Licht zu seinem Wege stets die kürzeste Zeit braucht, ohne weiteres zu der Annahme der Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit kommen, so daß also die folgerichtige Durch-

führung des Eddingtonschen Gedankens, der ja durch seine Gleichsetzung von Energie und Masse manches für sich hat, auf meine Gravitationstheorie führen muß, wenn man an dem oben genannten Fermatschen Prinzip der kürzesten Lichtzeit und daneben an der Unverzerrtheit des Raumes festhält. In letzteren Punkte setzt die Abweichung der Einsteinschen Theorie ein, der statt dessen das Verschwinden des Krümmungstensors $B_{\mu\nu}$ fordert und infolgedessen auch andere Effekte, nämlich stets das Doppelte, sowohl für die Ablenkung des Lichtstrahls, als auch für die Perihelwanderung erhält [vgl. Gleichung (52), S. 161 meiner Arbeit].

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

3. *III. Die Punktbewegung im allgemeinen
Gravitationsfelde;
von Ernst Reichenbächer.*

In meiner Arbeit über das skalare Gravitationspotential hatte ich gezeigt, daß die Feldgleichung

$$(1) \quad \mathfrak{R} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A}$$

für ein beliebiges Gravitationsfeld aufrecht erhalten werden kann, das sich aus n Einzelfeldern so zusammensetzt, daß in jedem einzelnen von diesen die Wirkung der Gravitation darin besteht, daß eine Schar von Räumen, die sogenannten Ruhräume, unverzerrt bleibt, während deren orthogonale Trajektorien eine Verkürzung im Verhältnis $1:l_h$ ($h = 1$ bis n) erfahren. Das Gesamtpotential \mathfrak{A} war gleich der Summe der Logarithmen dieser Verzerrungsfaktoren l_h . Daraus geht nun hervor, daß man mehrere dieser Einzelwirkungen oder sie alle durch eine einzige gleichartige ersetzen kann, bei der wiederum eine Schar von Räumen unverzerrt bleibt, während der Verzerrungsfaktor l der orthogonalen Trajektorien (also die Gesamtlichtgeschwindigkeit) jetzt gleich dem Produkt sämtlicher Einzellichtgeschwindigkeiten l_h oder gleich e^n wird. Man erhält also aus der unverzerrten Minkowskischen Mannigfaltigkeit ein beliebiges Gravitationsfeld dadurch, daß man eine Schar von Räumen unverzerrt läßt und deren senkrechte Trajektorien im Verhältnis $1:l$ verkürzt. Dabei wandern aber die Durchschnittspunkte der Trajektorien mit den Räumen, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß in jedem von diesen Räumen eine andere Koordinatentransformation auszuführen ist, deren Komponenten von der längs der Trajektorien zu messenden Koordinate abhängen. Wird diese wieder mit x^0 , die drei anderen mit x^1, x^2, x^3 bezeichnet,

so besteht die Verzerrung in der vorderen und hinteren Multiplikation des Fundamentaltensors mit der Matrix

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 0 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Wäre l von x^1, x^2, x^3 und a_i^k von x^0 unabhängig, so würde die Verzerrung auf eine bloße Transformation hinauslaufen. Dies soll nicht der Fall sein, es soll sich vielmehr um eine echte Verzerrung handeln. Da der Verzerrungsfaktor l sich längs einer Trajektorie nicht ändern darf, müssen diese in die Räume $l = \text{const.}$ fallen, auf denen also die unverzerrten Räume senkrecht stehen müssen.

Für die Untersuchung der Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfeld, bei der ich mich eng an das von mir in meiner Arbeit „Theorie der Elektrizität und Gravitation“ für einen einzigen Anziehungsmittelpunkt beschriebene Verfahren anlehne, lege ich nun ein solches halborthogonales Koordinatensystem der unverzerrten Räume mit ihren Trajektorien zugrunde. Die Maßvorschrift

$$(2) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

für das Linienelementquadrat geht also über in

$$(3) \quad ds^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu,$$

wobei

$$(4) \quad g'_{00} = l^2 g_{00}, \quad g'_{0r} = g_{0r} = 0, \quad g'_{\mu\nu} = a_\mu^e a_\nu^e g_{e\sigma}$$

und

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x'^0} = l \frac{\partial f}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = a_\mu^e \frac{\partial f}{\partial x^e}$$

ist, da

$$(6) \quad dx^0 = l dx'^0 \quad \text{und} \quad dx^e = a_\mu^e dx'^\mu$$

wird.

Maßgebend für das von mir in genannter Arbeit entwickelte Verfahren waren die Gleichungen auf S. 156f.

$$(7) \quad \frac{1}{\sigma} = - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} \cos^2 \psi,$$

$$(8) \quad \cos^2(r\sigma) \cos^2\psi = \left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 = \cos^2(x^0s)$$

und

$$(9) \quad \frac{\cos(x_r\sigma)}{\sigma} = -\frac{d^2s_r}{ds^2} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$(10) \quad \frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} \frac{\cos^2(x_0s)}{\cos^2(r\sigma)}.$$

In dieser Gleichung spielt $\sqrt{g_0}$ die Rolle des Verzerrungsfaktors und ist daher im allgemeinen Falle durch 1 zu ersetzen, während alles andere übernommen werden kann. Dagegen geht Gleichung (9) über in

$$(11) \quad \frac{c_r^{(\sigma)}}{\sigma} = -x_{rs}^{(\sigma)}.$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen Kottlers in seinen Annalenarbeiten, 44. S. 701ff. und 45. S. 481ff. Diese Größen lassen sich durch die Gleichungen bestimmen

$$(12) \quad c_r^{(\sigma)} = \frac{dx^r}{ds^\sigma}$$

und

$$(13) \quad x_{rs}^{(\sigma)} = \frac{d^2x^r}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r \\ \tau \lambda \end{matrix} \right\} \frac{dx^\tau}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Mit den Richtungskosinus hängen die $c_r^{(\sigma)}$ zusammen durch die Gleichung von

$$(14) \quad \cos(\sigma x^i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} g_{ii} \frac{dx^i}{ds^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} g_{ii} c_i^{(\sigma)}$$

und

$$c_r^{(\sigma)} = g^{rk} \sqrt{g_{kk}} \cos(\sigma x^k).$$

Also wird die Gleichung (11):

$$\frac{c_r^{(\sigma)}}{\sigma} = -\frac{d^2x^r}{ds^2} - \left\{ \begin{matrix} r \\ \tau \lambda \end{matrix} \right\} \frac{dx^\tau}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Man multipliziere mit g_{hr} und summiere über τ von 0 bis 3:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{h\tau} c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} &= -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} - g_{h\tau} g^{\tau\varrho} \left[\begin{matrix} \kappa & \lambda \\ \varrho & \end{matrix} \right] \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} \\
&\quad - \left[\begin{matrix} \kappa & \lambda \\ h & \end{matrix} \right] \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&= -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\kappa h}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \right] \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&= -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa h}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&= -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{dg_{\kappa h}}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dg_{\lambda h}}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
&= -g_{h\tau} \frac{d^2 x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{dg_{\tau h}}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dg_{\tau h}}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \\
(15) \quad \frac{g_{h\tau} c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} &= -\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}.
\end{aligned}$$

Führt man hierin den Wert von $c_\tau^{(\sigma)}$ aus (14) ein, so ergibt sich

$$(16) \quad \frac{\sqrt{g_{hh}} \cos(x^h \sigma)}{\sigma} = -\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}$$

und nach Berücksichtigung der Gleichung (10):

$$\begin{aligned}
(17) \quad -\frac{\partial \lg I}{\partial \sigma} \frac{\cos(x^h \sigma) \cos^2(x^0 \sigma)}{\cos^3(r \sigma)} \sqrt{g_{hh}} &= -\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds}.
\end{aligned}$$

Die Größen $\partial \lg I / \partial \sigma$ und $\cos(x^h \sigma)$ lassen sich nun ganz dem Verfahren auf S. 156 f. a.a.O. entsprechend umbilden. Fällt nämlich die eine von den drei räumlichen Achsen mit dem Gradienten r des Gravitationspotentials zusammen, so ist, da außer $\partial \lg I / \partial r$ alle anderen Differentialquotienten verschwinden,

$$\begin{aligned}
(18) \quad \frac{\partial \lg I}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \lg I}{\partial x^e} c_e^{(\sigma)} = \frac{\partial \lg I}{\partial x^e} g^{ek} \sqrt{g_{kk}} \cos(\sigma x^k) \\
&= \frac{\partial \lg I}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \cos(\sigma r).
\end{aligned}$$

Es steht ja σ orthogonal zu den beiden nicht mit x^0 und r zusammenfallenden Achsen; daher verschwindet $\cos(\sigma x^h)$ für diese Richtungen; andererseits ist aber $g^{e0} = 0$ außer für $e = 0$, wo aber wieder $\partial \lg I / \partial x^e$ verschwindet. So erhält man

$$(19) \quad -\frac{\partial \lg I}{\partial r} \frac{\cos(x^h \sigma)}{\cos(r \sigma)} \sqrt{\frac{g_{hh}}{g_{rr}}} \cos^2(x^0 s) = -\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{h1}}{\partial x^h} \frac{dx^\tau}{ds} \frac{dx^1}{ds}.$$

Nun ist, da σ in der $x_0 r$ -Ebene liegt (vgl. S. 156):

$$(20) \quad \cos(x^h \sigma) = \cos(r \sigma) \cdot \cos(r x^h),$$

ferner

$$\frac{\partial \lg I}{\partial x^h} = \frac{\partial \lg I}{\partial x^2} c_e^{(h)} = \frac{\partial \lg I}{\partial x^2} g^{ek} \sqrt{g_{kk}} \cos(x^h x^k)$$

in einem beliebigen Koordinatensystem. Wählt man dies¹⁾ so, daß eine seiner Richtungen mit r zusammenfällt, während die anderen dazu senkrecht stehen, so erhält man:

$$(21) \quad \frac{\partial \lg I}{\partial x^h} = \frac{\partial \lg I}{\partial r} \frac{\cos(r x^h)}{\sqrt{g_{rr}}}.$$

Das ergibt aber für die linke Seite der Gleichung (19) den Wert

$$-\frac{\partial \lg I}{\partial x^h} \sqrt{g_{hh}} \cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg I}{\partial x^h} \cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg I}{\partial x^h} \cdot g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)$$

[nach Gleichung (14), da $g_{r0} = 0$ für $\tau \neq 0$]. Demnach bekommt man für die Gleichung der durch die Gravitation erzeugten Punktbewegung

$$(22) \quad \frac{\partial \lg I}{\partial x^h} g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = \frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{h1}}{\partial x^h} \frac{dx^\tau}{ds} \frac{dx^1}{ds} \quad (h=1, 2, 3).$$

Diese Gleichung enthält die Koordinaten der unverzerrten Mannigfaltigkeit. Ich will jetzt zeigen, daß sie in dem verzerrten System eine geodätische Linie darstellt. Deren Gleichung in den neuen Koordinaten ist bekanntlich:

$$(23) \quad 0 = \frac{d}{ds} g'_{k\tau} \frac{dx'^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^k} \frac{dx'^\mu}{ds} \frac{dx'^\nu}{ds} \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

1) Dies Koordinatensystem ist auch der Gleichung (18) zugrunde zu legen. Seine Einführung ist möglich, da der Gradient r ganz in die $x^1 x^2 x^3$ -Räume fällt. Dieses System würde also auch halborthogonal sein und enthält als Parameterräume diejenigen, in denen das Gravitationspotential konstant ist.

Von diesen vier Gleichungen brauche ich nur die drei für $h = 1, 2, 3$, da die vierte aus ihnen sich ergibt. In diese will ich nach (4) und (5) die alten Koordinaten einführen:

$$0 = \frac{d}{ds} a_k^h a_r^r g_{hr} \frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2} a_k^h \frac{\partial g_{00}}{\partial x^h} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} a_k^h \frac{\partial a_\mu^\kappa a_\nu^\lambda}{\partial x^h} g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Nach (6):

$$0 = \frac{d}{ds} a_k^h g_{hr} \frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2} a_k^h \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^h} + 2g_{00} \frac{\partial \lg I}{\partial x^h} \right) \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} a_k^h \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^h} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa} a_k^h \left(a_\mu^\kappa \frac{\partial a_\nu^\lambda}{\partial x^h} + a_\nu^\lambda \frac{\partial a_\mu^\kappa}{\partial x^h} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Nun ist, da wegen der Unverzerrtheit der 1, 2, 3-Räume für diese Indizes Integrabilität vorgeschrieben ist,

$$\frac{\partial a_\nu^\lambda}{\partial x^k} = \frac{\partial a_k^\lambda}{\partial x^\nu},$$

d. h. nach (5):

$$a_k^h \frac{\partial a_\nu^\lambda}{\partial x^h} = a_\nu^h \frac{\partial a_k^\lambda}{\partial x^h}$$

und ebenso

$$a_k^h \frac{\partial a_\mu^\kappa}{\partial x^h} = a_\mu^h \frac{\partial a_k^\kappa}{\partial x^h}.$$

Daher wird das letzte Glied gleich

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{\partial a_k^\lambda}{\partial x^h} - \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{\partial a_k^\kappa}{\partial x^h} \\ & = - \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\kappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds}. \end{aligned}$$

Wegen der Vertauschbarkeit von κ und λ ist dies gleich

$$- g_{\lambda\kappa} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\kappa}{ds}$$

und hebt sich mit dem ersten Gliede, das aus der Differentiation von $\frac{d}{ds} a_k^h g_{hr} \frac{dx^r}{ds}$ herrührt, gerade auf. Es bleibt also nur übrig:

$$(24) \quad 0 = a_k^h \left\{ \left[\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^h} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - g_{00} \frac{\partial \lg I}{\partial x^h} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \right\}.$$

In dem dritten Gliede dieser Gleichung nehmen κ und λ die Werte 1 bis 3 an; dagegen enthält das zweite Glied den entsprechenden Wert für κ und $\lambda = 0$; Kombinationen von 0 mit anderen Indizes verschwinden, so daß das zweite Glied in das dritte einbezogen werden kann, in dem nun κ und λ alle Werte von 0 bis 3 annehmen:

$$(25) \quad 0 = a_k^h \left\{ \left[\frac{d}{ds} g_{h\tau} \frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - \frac{\partial \lg I}{\partial x^h} g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \right\}.$$

Dies sind drei Gleichungen für $h = 1$ bis 3, während h in jeder Gleichung die drei Werte durchläuft. Durch Multiplikation mit $a_n'^k$ und Addition über die drei Werte von h erhält man wegen $a_n'^k a_k^h = \delta_n^h (= 1$ für $h = n$, 0 für $h \neq n$):

$$0 = \left[\frac{d}{ds} g_{n\tau} \frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x^n} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - \frac{\partial \lg I}{\partial x^n} g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2.$$

Dies ist aber wieder das Gleichungssystem (22) (mit n statt h).

Daraus ergibt sich wie in Einsteins Theorie, daß die Punktbewegung unter dem Einfluß der Gravitation bei Abwesenheit anderer Kräfte derartig ist, daß die Weltlinien im verzerrten System geodätische Linien sind. Dies erweist sich hier aber als Folgerung der Gleichung (7), die die Krümmung der Isogonen oder Weltlinien aus der Änderung des Einheitsmaßes für die zeitlichen Vektoren im Verhältnis zu den räumlichen — denn das ist die Lichtgeschwindigkeit 1 — berechnet, so daß also die Annahme der geodätischen Linien als begründet erscheint.

Wilhelmshaven, den 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

4. Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁾; von H. Lang.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — § 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten. — § 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung. — § 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. — § 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nichtsymmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 9. Definition der Divergenz des Tensors n ten Ranges.

Einleitung.

Eine geometrische Darstellung von *Vektoren* durch gerichtete Strecken im *Riemannschen Raum* von vier Dimensionen, das heißt in einem Raum mit der Maßbestimmung

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^{1-4} g_{ik} dx^i dx^k,$$

scheint zunächst nicht statthaft zu sein, da der Riemannsche Raum keine Geraden im euklidischen Sinne enthält, also auch nicht Strecken als Teile einer Geraden in ihm abgetragen werden können. Wie aber in der Mechanik Geschwindigkeit und Beschleunigung eines auf einer krummen Fläche bewegten Punktes durch gerichtete Strecken dargestellt werden, die nur nicht mehr in dieser Fläche selbst liegen, so wird es auch für den Riemannschen Raum zulässig sein, Vektoren durch Strecken darzustellen, die von Punkten des Riemannschen Raumes ausgehen, aber mit allen ihren anderen Punkten nicht mehr

¹⁾ Kürzung der unter dem gleichen Titel an der Universität München erschienenen Dissertation des Verfassers.

in ihm liegen. Dazu muß freilich angenommen werden, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem höherdimensionalen euklidischen Raum gelegen ist, ebenso wie die krumme Fläche von zwei Dimensionen in einem euklidischen Raum von drei Dimensionen liegt. Diese Annahme kann, wie kurz angedeutet werden soll, gemacht werden, wenn nur die Dimension des euklidischen Raumes hoch genug gewählt wird. Es ist nämlich ein Riemannscher Raum von vier Dimensionen als in einem euklidischen Raum von m Dimensionen gelegen zu betrachten, wenn die Maßbestimmung (1) übergeführt werden kann in die Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_r^{1-m} dz_r^2$$

durch die Transformation

$$z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad r = 1, 2 \dots m.$$

Dann ist nämlich

$$dz_r = \sum_i^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} dx^i,$$

$$dz_r^2 = \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k$$

und

$$ds^2 = \sum_r^{1-m} \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k.$$

Soll dies aber die im Riemannschen Raum gegebene Maßbestimmung sein, so müssen die Gleichungen

$$g_{ik} = \sum_r^{1-m} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k}$$

erfüllt sein. Dies wird im allgemeinen nur möglich sein, wenn $m = 10$ ist, da bei allgemeiner Maßbestimmung 10 Funktionen g_{ik} vorhanden sind. Lassen sich also m Funktionen $z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4)$ angeben, die diesen Differentialgleichungen genügen, so ist es berechtigt zu sagen, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem euklidischen Raum von m Dimensionen liegt. Es können also von einem Punkt des Riemannschen Raumes aus Gerade gezogen werden, die dann

in ihrem weiteren Verlauf in eben diesem euklidischen Raum liegen. Sämtliche Strecken aber, die von einem Punkt des Riemannschen Raumes in den ∞^3 möglichen Richtungen ausgehen, erfüllen einen ebenen Raum von vier Dimensionen, den *Tangentialraum* in dem betreffenden Punkt des Riemannschen Raumes.

Entsprechend werden auch die in der allgemeinen Relativitätstheorie besonders wichtigen *Tensoren* nicht im Riemannschen Raum selbst, sondern in seinen Tangentialräumen geometrisch darzustellen sein. Eine geometrische Darstellung von Tensoren wurde jedoch bisher in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht angewandt. Zur besseren Veranschaulichung der physikalischen Vorgänge erscheint eine solche aber als erwünscht. Der Zweck der vorliegenden Betrachtung ist daher, für den symmetrischen Tensor 2. Ranges eine geometrische Darstellung zu geben und zu zeigen, wie mit Hilfe dieser Darstellung eine physikalisch wichtige Größe, die Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges geometrisch abgeleitet werden kann. Der Prozeß aber, durch den die Divergenz aus dem Tensor gewonnen wird, läßt sich auch auf den Tensor n ten Ranges übertragen, so daß auch die Divergenz des Tensors n ten Ranges unabhängig von einem Koordinatensystem definiert werden kann.

Der symmetrische Tensor 2. Ranges im euklidischen Raum von drei Dimensionen, für den der Deformationstensor oder der Spannungstensor einfache Beispiele aus der Mechanik der Kontinua sind, läßt sich bekanntlich geometrisch darstellen durch eine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung, deren Mittelpunkt in eben jenem Punkt liegt, für den der Tensor gegeben ist. Entsprechend wird sich dem symmetrischen Tensor 2. Ranges im euklidischen Raum von vier Dimensionen ein dreidimensionaler Mittelpunktsraum 2. Ordnung zuordnen lassen, so daß die gegebenen Tensorkomponenten die Koeffizienten in der Gleichung dieses Mittelpunktsraumes bilden. Dieser Mittelpunktsraum 2. Ordnung gibt dann eine geometrische Darstellung des Tensors, ebenso wie eine gerichtete Strecke die eines Vierervektors, zwei zueinander senkrechte Ebenenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Lage die des Sechservektors.¹⁾

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 32. S. 749. 1910.

In einer Beziehung aber unterscheidet sich die geometrische Darstellung des Tensors durch einen Mittelpunktsraum zweiter Ordnung von der oben erwähnten geometrischen Darstellung der Vektoren und leistet weniger: Sie gibt nicht unmittelbar die Möglichkeit einer geometrischen Deutung der einzelnen Tensorkomponenten, wie dies bei der geometrischen Darstellung des Vierer- und Sechservektors der Fall ist. Für den Vierervektor ist nämlich die Komponente nach einer Koordinatenachse geometrisch bestimmt durch die Orthogonalprojektion des Vierervektors auf diese Achse; für den Sechservektor ist die Komponente nach einer Koordinatenebene bestimmt durch die Orthogonalprojektion der beiden Ebenenstücke auf diese Ebene. Um eine geometrische Deutung der einzelnen Tensorkomponenten in ähnlicher Art zu ermöglichen, ist es nötig, den Tensor durch ein anderes Gebilde, einen „Doppelvektor“ bzw. ein Quadriple von Doppelvektoren darzustellen, das dann in dieser Beziehung der geometrischen Darstellung der Vierer- und Sechservektoren gleichwertig ist. Wie dieses Gebilde mit dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung zusammenhängt, wird sich bei seiner Ableitung ergeben.

§ 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten.

In dem Riemannschen Raum von vier Dimensionen wird die Länge eines Linienelementes, das von einem Punkt 0 mit den Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 1) ausgeht, berechnet durch

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^{1-4} g_{ik} dx^i dx^k,$$

wobei die g_{ik} Funktionen der Koordinaten sind.

Soll in dem Tangentialraum an den Riemannschen Raum im Punkt 0 die euklidische Geometrie gelten, so muß sich die Länge s einer vom Punkt 0 ausgehenden Strecke OP berechnen lassen durch

1) Die Bezeichnung der kontravarianten Koordinaten durch obere Indizes ist gewählt im Anschluß an Hessenberg. „Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie.“ Mathem. Ann. 78. 1917. Sie ist notwendig, wenn neben den kontravarianten auch kovariante Koordinaten benutzt werden, was im folgenden geschehen soll.

$$(2) \quad s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wobei die g_{ik} jetzt Konstante sind und die Werte haben, die ihnen im Punkt 0 zukommen. Dabei ist ferner angenommen, daß die Tangenten an die Kurven der wachsenden kontravarianten Koordinaten zu Koordinatenachsen gewählt sind. Denn da dann für die unendlich kleine Strecke, die in dem gemeinsamen Volumelement des Riemannschen Raumes und des Tangentialraumes liegt, die Maßbestimmung (1) gilt, so muß sich auch die endliche Strecke durch die gleiche quadratische Form der Koordinaten berechnen lassen.

Diese Form der Maßbestimmung im euklidischen Raum geht aus der gewöhnlichen Form der Maßbestimmung im schiefwinkligen, geradlinigen Koordinatensystem hervor, wenn die Koordinaten, die geometrisch ja die Längen der *Parallelprojektionen* der Strecke OP auf die Achsen sind, nicht in dem *Einheitsmaßstab*, sondern auf jeder Achse mit besonderem Maßstab gemessen werden. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz für das schiefwinklige Achsensystem ist nämlich die Länge s gegeben durch

$$(2a) \quad s^2 = \sum_{ik} X^i X^k \cos(i k),$$

wo (ik) den Winkel zwischen der i - und der k -Achse bezeichnet. Durch die Transformation

$$X^i = \sqrt{g_{ii}} x^i,$$

die der Einführung eines besonderen Maßstabes auf jede Achse entspricht, geht (2a) über in

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wenn noch festgesetzt wird, daß

$$g_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos(i k)$$

sein soll.

Daraus folgt umgekehrt für die Maßbestimmung (1), daß die Winkel zwischen den Kurven der wachsenden x^i Koordinaten im Riemannschen Raum gegeben sind durch

$$\cos(i k) = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

Der Punkt 0 kann aber statt durch die Parallelprojektionen auch durch die *Orthogonalprojektionen* auf die Achsen im schief-

winkligen System bestimmt werden. Die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion X_m der Strecke OP auf die m -Achse wird aus den im Einheitsmaßstab gemessenen Parallelprojektionen X^i berechnet durch

$$X_m = \sum_i X^i \cos(mi)$$

in Erweiterung einer einfachen Formel der dreidimensionalen Geometrie. Werden hierin rechts die X^i durch die x^i ausgedrückt und noch festgesetzt, daß die Orthogonalprojektionen nicht im Einheitsmaßstab gemessen werden sollen, sondern so, daß

$$x_m = \sqrt{g_{mm}} X_m,$$

wenn x_m die im veränderten Maßstab gemessenen Längen sind, so ergibt sich die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten

$$(3) \quad x_m = \sum_i g_{mi} x^i$$

und ihre Umkehrung

$$(3a) \quad x^i = \sum_m g^{mi} x_m,$$

wobei g^{mi} gleich ist der Unterdeterminante von g_{mi} in der Determinante der g_{ik} , geteilt durch den Wert g dieser Determinante.

Die Strecke OP kann aber aufgefaßt werden als ein vom Punkt 0 ausgehender Vektor \mathfrak{s} . Dieser Vierervektor hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten X_1, X_2, X_3, X_4 , in dem schiefwinkligen mit allgemeiner Maßbestimmung aber wird er bestimmt sein ebensowohl durch die kontravarianten Komponenten x^1, x^2, x^3, x^4 , wie durch die kovarianten Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 . Der Zusammenhang zwischen den kontravarianten und kovarianten Komponenten des Vektors \mathfrak{s} wird durch die Gleichungen (3) und (3a) gegeben. Diese Gleichungen, hier aus der geometrischen Darstellung des Vektors abgeleitet, gelten nicht nur für den euklidischen, sondern auch für den Riemannschen Raum und können rein analytisch gefunden bzw. definiert werden.¹⁾ Dann zeigt sich umgekehrt die Berechtigung der Darstellung eines Vektors durch eine

1) So bei H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. § 5. Berlin 1918.

Strecke darin, daß durch diese geometrische Darstellung eben jener Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten wieder gegeben wird.

Daß ein Vierervektor, für den drei der kontravarianten Komponenten den Wert Null haben, in die Richtung derjenigen Achse fällt, nach der die nicht verschwindende Komponente auftritt, folgt sofort aus dem Umstand, daß die kontravarianten Komponenten des Vektors gegeben sind durch die Parallelprojektionen auf die Achsen. Wie liegt aber ein Vierervektor, für den drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben? Wenn die kovariante Komponente bezüglich einer Achse verschwindet, so heißt das, die Orthogonalprojektion des Vektors auf die betreffende Achse verschwindet, der Vektor muß also senkrecht auf dieser Achse stehen. Wenn drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben, so steht der Vektor also senkrecht auf drei Achsen des Koordinatensystems oder senkrecht auf dem durch diese drei Achsen bestimmten dreidimensionalen Raum.

Mit Rücksicht auf die Anwendung in den folgenden Paragraphen möge nun noch auf einige Beziehungen zwischen Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen hingewiesen werden.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem (X_i) mit gewöhnlicher Maßbestimmung zu einem schiefwinkligen System (x^i) mit allgemeiner Maßbestimmung wird vermittelt durch Transformationsformeln

$$(4) \quad X_m = \sum_i \alpha_{mi} x^i.$$

Auch die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vierervektors a im System der x^i drücken sich durch die Komponenten im System der X_i aus durch

$$(4a) \quad A_m = \sum_i \alpha_{mi} a^i.$$

Daraus ergibt sich die Beziehung zwischen den kovarianten Komponenten a_i und den A_i durch einfache Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (3) zu

$$(5) \quad a_k = \sum_m \alpha_{mk} A_m$$

Ihre Umkehrung ist

$$(5a) \quad A_m = \sum_k \alpha^{mk} a_k.$$

Die Gleichungen (4a) und (5a) können noch etwas anders gedeutet werden. In dem System (x') wird die Koordinatenachse X_m eine bestimmte, aber beliebige Richtung haben. A_m ist die Orthogonalprojektion des Vektors a auf diese Richtung. Nun wird die Orthogonalprojektion eines Vektors a auf eine beliebige Richtung nach den Regeln der Vektorrechnung gefunden, indem das skalare Produkt aus dem Vektor a und dem Einheitsvektor η in der betreffenden Richtung gebildet wird. Da dies auch für Koordinatensysteme mit allgemeiner Maßbestimmung gelten muß wegen der invarianten Bedeutung der Orthogonalprojektion und des skalaren Produkts, so muß also A_m auch bestimmt sein durch

$$(4b) \quad A_m = \sum_k \eta_k a^k$$

oder

$$(5b) \quad A_m = \sum_k \eta^k a_k,$$

wo η_k bzw. η^k die Komponenten des Einheitsvektors η sind. Das sind aber gerade die Gleichungen (4a) und (5a), wenn nur $\alpha^{mk} = \eta^k$ und $\alpha_{mk} = \eta_k$ gesetzt wird. Sie erlauben also die Orthogonalprojektion eines Vektors auf eine beliebige Richtung zu berechnen aus den Komponenten des Vektors a und des Einheitsvektors η in dem jeweiligen Koordinatensystem.

§ 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung.

Aus einem Vierervektor a , der durch eine vom Punkt 0 des Riemannschen Raumes ausgehende Strecke geometrisch dargestellt wird und durch seine Komponenten A_1, A_2, A_3, A_4 oder a^1, a^2, a^3, a^4 oder a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sein kann, läßt sich in einfacher Weise ein symmetrischer Tensor 2. Ranges bilden dadurch, daß jede der Komponenten von a mit jeder anderen und mit sich selbst multipliziert wird. Die Komponenten dieses Tensors lauten dann

$$T_{ik} = A_i A_k \text{ oder } t^{ik} = a^i a^k \text{ oder } t_{ik} = a_i a_k.$$

Im ersten Fall sind es die auf ein rechtwinklig geradliniges System bezogenen Komponenten des Tensors, im zweiten Fall die

kontravarianten, im dritten Fall die kovarianten Komponenten des auf ein schiefwinkliges System mit allgemeiner Maßbestimmung bezogenen Tensors. Dazu treten als vierte Möglichkeit der Bestimmung dieses Tensors die gemischten Komponenten

$$t_i^k = a_i a^k.$$

Letztere erfüllen jedoch nicht mehr die Symmetriebedingungen.

Es ist offenbar, daß der so gebildete Tensor ein *spezieller* ist; denn zwischen seinen Komponenten bestehen noch gewisse Gleichungen, so z. B.

$$t^{ii} t^{kk} = t^{ik}{}^2.$$

Dieser spezielle Tensor möge im folgenden kurz mit $[[a^2]]$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen $[[\]]$ die äußere Multiplikation der Vektorkomponenten andeuten soll.¹⁾

Welches ist nun die Gleichung des *Tensorraumes* des Tensors $[[a^2]]$? Wenn das rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, so lautet sie

$$A_1^2 X_1^2 + A_2^2 X_2^2 + A_3^2 X_3^2 + A_4^2 X_4^2 + 2 A_1 A_2 X_1 X_2 + 2 A_1 A_3 X_1 X_3 + \dots = \text{const},$$

wobei die Konstante willkürlich ist und gleich 1 angenommen werden kann. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat eines linearen Ausdrucks, so daß auch geschrieben werden kann:

$$(6) \quad (A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0.$$

Der Tensorraum von $[[a^2]]$ zerfällt also in die beiden ebenen Räume

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + 1 = 0$$

und

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 - 1 = 0.$$

Dies sind zwei parallele ebene Räume im Abstand

$$r = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}$$

1) Die Bezeichnung „Äußere Multiplikation“ im Anschluß an A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. § 7. Ann. d. Phys. 49. S. 784. 1916.

beiderseits des Nullpunkts. Auch liegt der Vektor a in der Richtung des Lotes vom Nullpunkt auf die ebenen Räume, denn die Neigungswinkel des Vektors a gegen die Achsen, wie die des Lotes r sind bestimmt durch

$$\cos \alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}} \text{ usw.}$$

Der Vektor a steht also senkrecht auf den beiden parallelen ebenen Räumen. Beide sind durch ihn eindeutig bestimmt, da ja die Komponenten des Vektors a eben die Koeffizienten in der Gleichung des Tensorraumes sind. Es liegt daher nahe, nicht die beiden parallelen ebenen Räume als Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ zu betrachten, sondern vielmehr die beiden entgegengesetzt gerichteten Vektoren von der Länge

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2},$$

die auf je einen der beiden parallelen ebenen Räume hinweisen und auf ihnen senkrecht stehen und die dann als geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ zu einem *Doppelvektor* verschmelzen und sich nicht, wie sie es als gewöhnliche Vektoren tun würden, als gleich und entgegengesetzt gerichtet, gegenseitig aufheben.

Dieser Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $+a$ und $-a$, werde im folgenden einfach als der Doppelvektor a bezeichnet. Nebenstehend ist die Schnittfigur gezeichnet, die entsteht, wenn die beiden parallelen ebenen Räume durch einen ebenen Raum E , der den Doppelvektor a enthält, geschnitten werden. Die Schnittflächen des Raumes E mit den parallelen, ebenen Räumen sind zwei parallele Ebenen; der Doppelvektor a steht auf diesen Ebenen senkrecht.

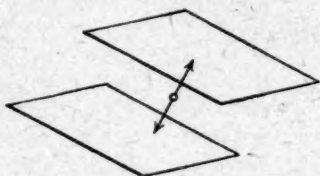


Fig. 1.

Diese geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ ist selbstverständlich unabhängig vom Koordinatensystem; denn der Doppelvektor, abgeleitet aus dem Raumpaars, ist wie dieses in jedem Koordinatensystem derselbe. Im rechtwinkligen System der X_i kam die Beziehung zwischen Raumpaars und Doppelvektor analytisch dadurch zum Ausdruck, daß die Komponenten

von a als Koeffizienten in den Gleichungen der ebenen Räume auftraten. Auch für ein beliebiges Koordinatensystem gilt Entsprechendes. Denn die Gleichung des Tensorraumes

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0$$

geht durch die Transformation (4) über in

$$(6a) \quad (a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^2 - 1 = 0,$$

oder, wenn statt kontravarianter Koordinaten kovariante eingeführt werden, in

$$(6b) \quad (a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4)^2 - 1 = 0.$$

Es ergibt sich also: Ist der Tensor $[[a^2]]$ — und wie sich später zeigen wird ein beliebiger Tensor 2. Ranges — gegeben durch die *kontravarianten Komponenten* $t^{ik} = a^i a^k$, so läßt sich die Gleichung des Tensorraumes unter Benützung dieser Komponenten als Koeffizienten in *kovarianten Koordinaten* x_i anschreiben und umgekehrt, wenn der Tensor in *kovarianten Komponenten* gegeben ist, erscheint die Gleichung des Tensorraumes in *kontravarianten Koordinaten*.

Damit ist die geometrisch invariante Beziehung zwischen dem Paar paralleler ebener Räume und dem Doppelvektor a auch für ein beliebiges Koordinatensystem analytisch zum Ausdruck gebracht.

Die geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ durch den Doppelvektor a läßt sich nun auch noch dadurch physikalisch deuten, daß gezeigt wird, wie der Tensor $[[a^2]]$ zusammen mit einem Ortsvektor $r = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ einen Vektor p bestimmt, so daß für alle möglichen r die p das Vektorfeld einer einfachen *Dehnung in Richtung des Doppelvektors* a liefern. Denn wird in üblicher Weise p als lineare Vektorfunktion von r mit Hilfe der Tensorkomponenten angeschrieben, also

$$p_i = a_i a_1 x^1 + a_i a_2 x^2 + a_i a_3 x^3 + a_i a_4 x^4,$$

so wird daraus einfach

$$(7) \quad p_i = a_i (a r),$$

wo $(a r)$ das skalare Produkt von a und r bezeichnet. p ist also ein Vektor in der Richtung von a , weil seine Komponenten denen von a proportional sind. Für alle Punkte des ebenen

Raumes, der bestimmt ist durch $(ar) = 0$, verschwindet p , während er, wie sich leicht zeigen läßt, in allen zu diesem Raum parallelen ebenen Räumen einen konstanten Wert hat; für solche, die im gleichen Abstand auf beiden Seiten von $(ar) = 0$ liegen, hat p entgegengesetzt gleiche Werte. Das gleiche Verhalten nach Richtung und Größe zeigt aber die bei einer vierdimensionalen Dehnung des Raumes entstehende Verschiebung jedes Raumpunktes.

Der Doppelvektor a kann also auch aufgefaßt werden als geometrischer Ausdruck für eine Dehnung des Raumes, ebenso wie der einfache Vierervektor eine Parallelverschiebung, der spezielle Sechservektor eine Drehung des Raumes festlegt.

Die Darstellung einer Dehnung durch einen Doppelvektor findet sich für den dreidimensionalen Fall bei W. Voigt, „Kristallphysik“¹⁾ und „Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung“, Ann. d. Phys. 5. S. 241. 1901. Jedoch scheint diese Darstellung bisher nicht im Zusammenhang mit dem Tensor $[[a^2]]$ betrachtet worden zu sein. So erwähnt Budde in „Tensoren und Dyaden“ Braunschweig 1914, beide an getrennter Stelle.²⁾

§ 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Wie oben erwähnt, ist der Tensor $[[a^2]]$ ein spezieller symmetrischer Tensor, zwischen dessen Komponenten noch gewisse Gleichungen bestehen. Der allgemeine symmetrische Tensor im Riemannschen Raum aber ist bestimmt durch 10 von einander unabhängige Komponenten t^{ik} oder t_{ik} . Es gilt nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, der Satz:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich aus vier speziellen Tensoren von der Art des Tensors $[[a^2]]$ zusammensetzen.

Oder genauer geometrisch ausgedrückt:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich geometrisch darstellen durch vier Doppelvektoren, wobei diese Doppel-

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin-Leipzig 1910. II. Kapitel. § 70.

2) A. a. O., S. 25 und S. 216.

vektoren so gewählt werden können, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Der eben angeführte Satz behauptet also, daß immer vier spezielle Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ gefunden werden können, so daß die Summen ihrer Komponenten gleich sind den Komponenten des allgemeinen symmetrischen Tensors. Also

$$(8) \quad i^k = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k,$$

oder

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k.$$

Der Beweis hierfür läßt sich mittels Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen erbringen. Daß eine Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen immer möglich ist, wird für den Tensor in vier Dimensionen ebenso bewiesen, wie in drei Dimensionen für die Transformation der Fläche 2. Ordnung auf Hauptachsen. (Satz von Laplace.)

Die Gleichung des Tensorraumes im System der Hauptachsen lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 + T_{III} X_3^2 + T_{IV} X_4^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung kann aber aufgefaßt werden als die Summe der vier Gleichungen

$$T_I X_1^2 = \lambda, \quad T_{II} X_2^2 = \mu, \quad T_{III} X_3^2 = \nu, \quad T_{IV} X_4^2 = \tau,$$

wobei $\lambda + \mu + \nu + \tau$ dem Wert der willkürlichen Konstanten in der Gleichung des Tensorraumes gleich ist. Es wird daher im allgemeinen erlaubt sein, $(\lambda, \mu, \nu, \tau) = \pm 1$ anzunehmen.

Jede der vier Gleichungen stellt aber ein Paar paralleler, ebener Räume im Abstand

$$\pm \sqrt{\frac{\lambda}{T_I}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\mu}{T_{II}}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\nu}{T_{III}}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\tau}{T_{IV}}}$$

vom Nullpunkt dar, jedoch nur dann ein reelles Raumpaar, wenn λ, μ, ν, τ gleiches Vorzeichen haben wie $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$. Dementsprechend soll die Vorzeichenwahl für λ, μ, ν, τ getroffen werden. Jedes dieser Raumpaare ist nun nach den Betrachtungen des § 2 bestimmt durch einen Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren a, b, c, d , deren Komponenten hier die Werte haben

$$(9) \quad \begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{T_I}{\lambda}}, & A_2 = 0, & A_3 = 0, & A_4 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = \sqrt{\frac{T_{II}}{\mu}}, & B_3 = 0, & B_4 = 0, \\ C_1 = 0, & C_2 = 0, & C_3 = \sqrt{\frac{T_{III}}{\nu}}, & C_4 = 0, \\ D_1 = 0, & D_2 = 0, & D_3 = 0, & D_4 = \sqrt{\frac{T_{IV}}{\tau}}. \end{cases}$$

Dabei stehen die vier Doppelvektoren auf einander senkrecht, weil a , b , c , d auf einander senkrecht stehen.

Damit ist die Möglichkeit einer Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier speziellen Tensoren oder die Möglichkeit einer Darstellung durch vier Doppelvektoren bewiesen.

Wird zu einem beliebigen Bezugssystem mit allgemeiner Maßbestimmung auf den Achsen übergegangen durch die Transformationsgleichungen (4), so wird die Gleichung des Tensorraumes

$$\lambda A_1^2 X_1^2 + \mu B_2^2 X_2^2 + \nu C_3^2 X_3^2 + \tau D_4^2 X_4^2 = \text{const}$$

übergehen in

$$\lambda (A_1 \sum_i \alpha_{1i} x^i)^2 + \mu (B_2 \sum_i \alpha_{2i} x^i)^2 + \nu (C_3 \sum_i \alpha_{3i} x^i)^2 + \tau (D_4 \sum_i \alpha_{4i} x^i)^2 = \text{const.}$$

Nun sind aber $a_m = \sum_k \alpha_{mk} A_k$ die kovarianten Komponenten des Vektors a ; das gleiche gilt für die kovarianten Komponenten von b , c und d . Also lautet die Gleichung des Tensorraumes mit Rücksicht auf das Verschwinden je dreier Komponenten im System der Hauptachsen auch

$$\lambda (\sum_i a_i x^i)^2 + \mu (\sum_i b_i x^i)^2 + \nu (\sum_i c_i x^i)^2 + \tau (\sum_i d_i x^i)^2 = \text{const.},$$

oder

$$\sum_{i,k} (\lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k) x^i x^k = \text{const.},$$

womit die Zerlegung des allgemeinen symmetrischen Tensors in die speziellen Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ gegeben ist.

Daher läßt sich allgemein sagen:

Die 16 Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} t_{ik} = \lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k, \\ (a\ b) = 0 & (a\ c) = 0 & (a\ d) = 0 \\ (b\ c) = 0 & (b\ d) = 0 & (c\ d) = 0 \end{cases}$$

für die 16 unbekannten Komponenten der Vektoren a, b, c, d haben immer ein reelles Lösungssystem, weil die Parameter λ, μ, ν, τ immer so als $+1$ oder -1 gewählt werden können. daß imaginäre Lösungen vermieden werden. Es läßt sich also allgemein der eingangs erwähnte Satz aussprechen, daß ein beliebiger symmetrischer Tensor durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren geometrisch dargestellt werden kann.

Werden aber statt der Doppelvektoren die Paare paralleler ebener Räume als geometrische Darstellung der speziellen Tensoren betrachtet, so nimmt dieser Satz die selbstverständlich erscheinende Form an:

Dem Mittelpunktstraum 2. Ordnung kann immer ein rechtwinkliges, vierdimensionales Parallelepiped eingeschrieben werden. (Eingeschrieben deshalb, weil der Tensorraum durch die Schnittpunkte der ebenen Raumpaare hindurchgehen muß.)

Die vier Paare paralleler ebener Räume bilden dabei die dreidimensionalen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Endlich läßt sich der Satz auch in der Form aussprechen:

Die durch einen beliebigen symmetrischen Tensor 2. Ranges bestimmte Deformation des Raumes läßt sich durch vier aufeinander senkrechte Dehnungen hervorbringen.

Es ist dieser Satz das vierdimensionale Analogon zu dem von Helmholtz für drei Dimensionen aufgestellten Satz, daß sich eine beliebige Deformation aus drei Dehnungen in zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen läßt.

§ 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

An das eben gewonnene Ergebnis, daß der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges sich geometrisch darstellen läßt durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, schließen sich sogleich folgende Fragen an:

Was für Arten von Tensoren entstehen, wenn die Doppelvektoren, aus denen die fraglichen Tensoren zusammengesetzt werden, nicht aufeinander senkrecht stehen?

Welche Arten von Tensoren entstehen durch Zusammensetzung von weniger als vier, also von zwei oder drei Doppelvektoren?

Daß alle diese so gebildeten Tensoren selbst wieder symmetrische Tensoren sind, folgt aus dem Additionsgesetz der Tensoren. Um aber die verschiedenen Arten von Tensoren zu untersuchen, die entsprechend den verschiedenen möglichen Zusammensetzungen aus speziellen Tensoren gebildet werden können, ist es nötig, die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges näher zu betrachten.

Invarianten des symmetrischen Tensors werden gewisse algebraische Verbindungen der Tensorkomponenten t_{ik} und der g_{ik} — der Komponenten des metrischen Fundamentaltensors — sein, die beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern ihren Wert nicht ändern.

Nehmen nun für einen bestimmten Tensor eine oder mehrere der Invarianten den Wert Null an, so sind dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Komponenten des Tensors gegeben. Die Komponenten dieses Tensors sind nicht mehr voneinander unabhängig, der Tensor also ein spezieller Tensor. Durch die Anzahl der Invarianten des symmetrischen Tensors sind also die möglichen Arten von speziellen Tensoren festgelegt.

Die Invarianten des symmetrischen Tensors können aber nach einer wohl auf Salmon zurückgehenden Methode auf folgende Art gefunden werden.

Die Gleichung des Tensorraumes

$$\sum_{ik} t_{ik} x^i x^k = \text{const}$$

wird bei einer beliebigen Koordinatentransformation übergehen in die Gleichung

$$\sum_{ik} t'_{ik} x'^i x'^k = \text{const},$$

wobei der Wert der Konstanten rechts derselbe bleibt. Die Komponenten des Tensors bilden also zusammen mit den kovarianten Koordinaten des Tangentialraumes eine invariante Bilinearform.

Andererseits sind alle möglichen Koordinatentransformationen dadurch charakterisiert, daß sie die Bilinearform

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

ungeändert lassen; denn diese gibt die invariante Länge des Linienelementes. Aber auch die Länge s einer von einem Punkt des Riemannschen Raumes ausgehenden Strecke im Tangentialraum, gegeben durch

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

muß invariant sein gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

Dann wird auch die Summe beider Bilinearformen

$$\sum_{ik} (t_{ik} + \lambda g_{ik}) x^i x^k$$

eine Invariante sein, wobei der Parameter λ noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Nach einem allgemeinen Satz der Invariantentheorie ist auch die Determinante dieser Bilinearform eine Invariante. Diese Determinante

$$(11) \quad |t_{ik} + \lambda g_{ik}| = \Delta(\lambda)$$

werde als Funktion des Parameters λ betrachtet und nach ihm entwickelt. So wird

$$(11a) \quad \Delta(\lambda) = S_0 \lambda^4 + S_1 \lambda^3 + S_2 \lambda^2 + S_3 \lambda + S_4$$

und es müssen wegen der freien Wählbarkeit von λ auch die Koeffizienten der Potenzen von λ einzeln Invarianten sein. Diese Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 enthalten nur die Komponenten des Tensors und die g_{ik} . Die Invariante S_0 aber hängt nur von den g_{ik} ab; sie ist, wie aus der Determinante $\Delta(\lambda)$ zu ersehen, gleich der Determinante g der g_{ik} , gehört also nicht mit zu den Invarianten des Tensors.

Über den Zahlenwert der Invarianten S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 läßt sich folgendes sagen:

Wird auf die Hauptachsen des Tensorraumes transformiert, so nimmt die Determinante $\Delta(\lambda)$ die Form an

$$\begin{vmatrix} T_I + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{IV} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Dabei ist angenommen, daß die g_{ik} so bestimmt sind, daß die Strecke s in rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen ist durch

$$s^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Es hat also die Determinante der g_{ik} und damit die mit ihr identische Invariante S_0 den Wert 1. Die Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 sind dann, wie aus der Gleichung (11a) hervorgeht, die symmetrischen Funktionen der Wurzeln dieser Gleichung. Nach der Transformation auf Hauptachsen ergeben sie sich speziell als die symmetrischen Elementarfunktionen gebildet aus den Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensors.

Diese Invarianten des Tensors wurden rein analytisch gefunden. Aber auch auf geometrischem Wege lassen sich Invarianten des Tensors aufweisen. Denn allen geometrisch invarianten Eigenschaften des den Tensor darstellenden Gebildes — als solches werde zu diesem Zweck nochmals der Mittelpunktstraum 2. Ordnung betrachtet — müssen analytisch Invarianten des Tensors entsprechen. Der Mittelpunktstraum 2. Ordnung ist geometrisch bestimmt, wenn seine Hauptachsen gegeben sind. Die Längen der Hauptachsen, gemessen im Einheitsmaßstab, ändern ihre Werte nicht beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern. Sie, oder was das gleiche bedeutet, die Werte $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$ der Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensorraumes sind also auch Invarianten des Tensors. Denn es lassen sich ja in jedem Koordinatensystem die Längen der Hauptachsen in bestimmter Weise aus den gegebenen Komponenten des Tensors berechnen. Nur sind sie zum Unterschied von den oben gefundenen Invarianten des Tensors keine rationalen, sondern irrationale Verbindungen der t_{ik} und g_{ik} . Wie bereits gezeigt, sind die S_1, S_2, S_3, S_4 die symmetrischen Funktionen der $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$. Es können entweder die ersteren oder die letzteren als unabhängige Invarianten betrachtet werden.

Nachdem so die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges bekannt sind, lassen sich die verschiedenen möglichen Arten spezieller Tensoren folgendermaßen bestimmen:

1. Eine der Invarianten $T_i = 0$. Dann ist auch

$$S_4 = T_I T_{II} T_{III} T_{IV} = 0.$$

Geometrisch heißt das, daß eine der Hauptachsen des Mittelpunktraumes 2. Ordnung unendlich groß wird; der Mittelpunktsraum artet aus in einen Zylinderraum 1. Art, dessen Gleichung auf Hauptachsen bezogen, lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 + T_{III} X_3^2 = \text{const}, \quad \text{wenn } T_i = T_{IV}.$$

Ein spezieller Tensor dieser Art ist darstellbar durch drei Doppelvektoren.

2. Zwei Invarianten verschwinden; $T_i = 0$ und $T_k = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$ und $S_3 = 0$. Der Mittelpunktsraum artet in einen Zylinderraum 2. Art aus, indem zwei der Hauptachsen unendlich groß werden. Seine Gleichung lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 = \text{const}, \quad \text{wenn } T_i = T_{IV}; \quad T_k = T_{III}.$$

Der entsprechende spezielle Tensor wird durch zwei Doppelvektoren geometrisch dargestellt.

3. Drei der Invarianten verschwinden; $T_i = 0$, $T_k = 0$, $T_l = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$, $S_3 = 0$, $S_2 = 0$. Drei der Hauptachsen werden unendlich groß; der Mittelpunktsraum 2. Ordnung artet in ein Paar paralleler ebener Räume aus, deren Abstand vom Nullpunkt gleich ist der vierten, nicht verschwindenden Hauptachse. Seine Gleichung lautet

$$T_I X_1^2 = \text{const}, \quad \text{wenn } T_i = T_{IV}, \quad T_k = T_{III}, \quad T_l = T_{II}.$$

Der spezielle Tensor dieser Art ist der durch einen Doppelvektor geometrisch darstellbare Tensor, der Tensor von der Form $[[a^2]]$.

Nun lassen sich auch die am Anfang dieses Paragraphen gestellten Fragen beantworten.

Durch Addition von drei speziellen Tensoren von der Form $[[a^2]]$ entsteht ein Tensor, für den $S_4 = 0$ ist.

Durch Addition von zwei speziellen Tensoren von der Form $[[a^2]]$ entsteht ein spezieller Tensor, für den $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$ ist.

Dabei, sowie bei der Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ ist es gleichgültig, ob die betreffenden Doppelvektoren aufeinander senkrecht stehen oder nicht.

Denn wenn auch zwei Doppelvektoren a und b nicht aufeinander senkrecht stehen, kann der durch die Komponenten

$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k$ bestimmte Mittelpunktsraum 2. Ordnung nur ein Zylinderraum 2. Art sein, da er durch die vier Schnittebenen der beiden Paare von parallelen, ebenen Räumen, den Tensorräumen von $[[a^2]]$ und $[[b^2]]$, gehen muß.

Ebenso kann der durch drei beliebige Doppelvektoren bestimmte Tensor mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k$ nur einen Zylinderraum 1. Art als Tensorraum haben; denn dieser Tensorraum muß die acht parallelen Geraden enthalten, in denen sich die drei Paare paralleler ebener Räume schneiden.

Der Tensorraum des aus vier beliebigen Doppelvektoren gebildeten Tensors mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$ wird ein durch die 16 Schnittpunkte der vier Paare ebener Räume gehender und durch sie bestimmter Mittelpunktsraum 2. Ordnung sein.

Dabei sind die Paare ebener Räume einem Quadrupel konjugierter Durchmesser des Mittelpunktsraumes 2. Ordnung parallel. Sie bilden die Begrenzungen eines dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenen vierdimensionalen Parallelepipeds. Die vier Doppelvektoren a, b, c, d stehen senkrecht auf den ebenen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Die Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren ist also nicht die einzig mögliche Art der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren, sondern nur ein besonderer Fall der allgemeinen Darstellung durch vier beliebig zueinander geneigte Doppelvektoren, deren Richtungen bestimmt sind durch die Lote auf ein dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenes Parallelepiped.

§ 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors.

Mit der durch die Betrachtungen des § 3 gewonnenen geometrischen Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges ist nun auch die geometrische Deutung der einzelnen Komponente des Tensors möglich geworden.

Bei dem speziellen Tensor $[[a^2]]$ ist nämlich die kovariante Komponente $t_{ik} = a_i a_k$ das Produkt der Orthogonalprojektionen des Vektors a auf i - und k -Achse. Die kontravariante Komponente $t^{ik} = a^i a^k$ ist das Produkt aus den Parallelprojektionen

des Vektors a auf die i - und die k -Achse. Werden Orthogonalprojektion und Parallelprojektion im Einheitsmaßstab gemessen, so ist

$$a_i = A_i \sqrt{g_{ii}} \quad \text{und} \quad a^i = \frac{A^i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

also

$$t_{ik} = A_i A_k \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \quad \text{und} \quad t^{ik} = \frac{A^i A^k}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

$T_{ik} = A_i A_k$ und $T^{ik} = A^i A^k$ sind die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des Tensors, wenn die Koordinatenbestimmung mit dem Einheitsmaßstab erfolgt.

Für $i = k$ ergeben sich die Komponenten t_{ii} oder t^{ii} als die Quadrate der Orthogonalprojektionen oder Parallelprojektionen auf die i -Achse.

Für den allgemeinen symmetrischen Tensor 2. Ranges, der durch vier Doppelvektoren a, b, c, d geometrisch dargestellt wird, ist dann die Komponente t_{ik} die Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren a, b, c, d auf die i - und k -Achse. Die Komponente t^{ik} ist die Summe der Produkte aus den Parallelprojektionen der Vektoren a, b, c, d auf die i - und k -Achse.

Daraus ist zu ersehen, daß die Komponenten des symmetrischen Tensors 2. Ranges nicht nach einer Geraden, wie beim Vierervektor, auch nicht nach einer Ebene, wie beim Sechservektor, sondern nach einem *Geradenpaar* zu bilden sind, wobei diese beiden Geraden einen beliebigen Winkel miteinander einschließen können, weil ja beim schiefwinkligen Koordinatensystem die Achsen beliebig zueinander geneigt sein können.

Dies führt dazu, die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem beliebigen Geradenpaar, das nicht mit einem Achsenpaar des Koordinatensystems zusammenfällt, geometrisch und unabhängig vom Koordinatensystem folgendermaßen zu definieren:

Es soll die Komponente T_{sr} des symmetrischen Tensors nach einem beliebigen Geradenpaar mit den Richtungen s und r gleich sein der Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren a, b, c, d auf die Richtungen s und r . Also

$$(12) \quad T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dabei sind A_s, A_r, B_s, B_r usw. die im Einheitsmaßstab gemessenen Orthogonalprojektionen. Da diese unabhängig vom Koordinatensystem sind, so ist auch T_{sr} unabhängig definiert.

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß zwei der Achsen in die Richtungen s und r fallen und werden in diesem Koordinatensystem die Längen mit dem Einheitsmaßstab gemessen, so tritt tatsächlich T_{sr} als eine der Komponenten des symmetrischen Tensors in diesem Koordinatensystem auf.

Wie drückt sich nun die durch die Gleichung (12) definierte Tensorkomponente nach zwei beliebigen Richtungen s und r durch die jeweils gegebenen Tensorkomponenten t_{ik} oder t^{ik} oder t_i^k aus?

Entsprechend der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren ist

$$\begin{aligned} t_{ik} &= a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k \\ \text{oder} \quad t^{ik} &= a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k \\ \text{oder} \quad t_i^k &= a_i a^k + b_i b^k + c_i c^k + d_i d^k. \end{aligned}$$

Es sei ferner η der Einheitsvektor in der Richtung s , ζ der Einheitsvektor in der Richtung r . Nun ist nach Gleichung (5b) des § 1

$$A_s = \sum_i a_i \eta^i.$$

Entsprechend wird

$$A_r = \sum_k a_k \zeta^k,$$

also

$$A_s A_r = \sum_{ik} a_i a_k \eta^i \zeta^k.$$

Ebenso findet sich

$$B_s B_r = \sum_{ik} b_i b_k \eta^i \zeta^k, \quad C_s C_r = \sum_{ik} c_i c_k \eta^i \zeta^k, \quad D_s D_r = \sum_{ik} d_i d_k \eta^i \zeta^k$$

Daher wird

$$\begin{aligned} T_{sr} &= \sum_{ik} (a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k) \eta^i \zeta^k \\ (12a) \quad T_{sr} &= \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k. \end{aligned}$$

Damit ist die Komponente des Tensors nach den Richtungen s und r ausgedrückt durch die kovarianten Komponenten t_{ik} .

Falls aber der Tensor nicht durch die kovarianten, sondern durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} in dem betreffenden

Koordinatensystem gegeben ist, kann nach Gleichung (4b) des § 1 geschrieben werden

$$A_s = \sum_i a^i \eta_i,$$

entsprechend

$$A_r = \sum_k a^k \zeta_k,$$

also ist

$$A_s A_r = \sum_{ik} a^i a^k \eta_i \zeta_k.$$

Die Ausdrücke für $B_s B_r$, $C_s C_r$ und $D_s D_r$ sind ebenso gebaut, so daß sich ergibt

$$(12b) \quad T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k.$$

Damit ist T_{sr} durch die kontravarianten Komponenten ausgedrückt.

Endlich, wenn der Tensor durch seine gemischten Komponenten gegeben ist, kann geschrieben werden

$$\begin{aligned} A_s A_r &= \sum_i a_i \eta^i \sum_k a^k \zeta_k \\ &= \sum_{ik} a_i a^k \eta^i \zeta_k \end{aligned}$$

und es wird

$$(12c) \quad T_{sr} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k.$$

Diese Bildungsweise der Tensorkomponente T_{sr} nach den Richtungen s und r aus den im jeweiligen Koordinatensystem gegebenen Tensorkomponenten stimmt überein mit der im dreidimensionalen Fall angewendeten Bildung der Tensorkomponente nach zwei Richtungen. So wird z. B. in der Mechanik der Kontinua gezeigt, daß die Spannung oder der Druck, der auf ein Flächenstück mit der Normalrichtung r wirkt, in der Richtung s die Größe hat

$$\sigma_{sr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \beta_k,$$

wobei σ_{ik} die Komponenten des Drucktensors in dem der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sind, $\cos \alpha_i$ die Richtungskosinus von s , $\cos \beta_k$ die von r . Wird insbesondere nach der Größe des Normaldruckes gefragt, so fällt s mit r zusammen und es ist

$$\sigma_{rr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \alpha_k.$$

Dabei tritt in der klassischen Mechanik und Elastizitätstheorie nur eine Art von Tensorkomponenten auf, da für die dort angewendeten orthogonalen Koordinatensysteme kontravariante und kovariante Komponenten zusammenfallen. Werden aber auch dort schiefwinklige Koordinatensysteme benutzt, so muß selbstverständlich auch in der klassischen Mechanik zwischen kontravarianten und kovarianten Vektor- und Tensorkomponenten unterschieden werden. Die bisher durchgeführten Betrachtungen über den symmetrischen Tensor sind aber auf diesen Fall unmittelbar anzuwenden, wenn nur statt der Dimensionszahl 4 die Dimensionszahl 3 gewählt wird.

§ 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Bisher wurde ein symmetrischer Tensor 2. Ranges betrachtet, der nur für einen Punkt des Riemannschen Raumes als gegeben angenommen wurde. Im folgenden soll nun der Betrachtung ein *Tensorfeld* zugrunde gelegt werden. Die Tensorkomponenten sind also Funktionen der Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 im Riemannschen Raum. Für jeden Punkt des Riemannschen Raumes ist damit ein bestimmter Tensor gegeben. Jeder dieser Tensoren kann geometrisch dargestellt werden durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, die im Tangentialraum des betreffenden Punktes liegen. Durch diese vier Doppelvektoren sind dann vier Vektorfelder a, b, c, d im Riemannschen Raum bestimmt. Diese vier Vektorfelder ersetzen gleichsam das Tensorfeld.

Es ist somit auch für jeden Punkt des Riemannschen Raumes eine Tensorkomponente T_{sr} nach zwei Richtungen s und r eindeutig bestimmt durch

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dadurch ist es möglich, einen aus dem Tensorfeld abzuleitenden Vierervektor, die Divergenz des symmetrischen Tensors — geschrieben $\text{Div } T$ — geometrisch und unabhängig vom Bezugssystem zu definieren in analoger Weise wie A. Sommerfeld die Divergenz des Vierervektors und Sechservektors definiert hat.¹⁾

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

Ein Vierervektor α ist unabhängig vom Bezugssystem bestimmt, wenn seine Komponente A_s in einer beliebigen Richtung s angegeben werden kann. Dabei muß unter der Komponente A_s die Orthogonalprojektion von α auf die Richtung s , gemessen im Einheitsmaßstab verstanden werden; denn nur die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion, nicht etwa die Parallelprojektion ist unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem bestimmbar.

Es sei nun s diejenige Richtung, nach der die Komponente des Vierervektors $\text{Div } T$ bestimmt werden soll. Ist $\Delta \Sigma$ ein beliebig gestaltetes vierdimensionales Volumen in der Umgebung des betrachteten Punktes, ΔS seine dreidimensionale Begrenzung n die Normale auf ΔS , so ist zu definieren:

$$(13) \quad \text{Div}_s T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta S} T_{..} dS}{\Delta \Sigma}.$$

Da die Komponente $T_{..}$ nach den Richtungen s und n unabhängig vom Bezugssystem und eindeutig definiert ist, so ist auch $\text{Div } T$ unabhängig vom Bezugssystem definiert.

Um nun zu erkennen, daß diese Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors mit der üblichen übereinstimmt, soll im folgenden gezeigt werden, wie sich durch spezielle Wahl des Volumelementes $\Delta \Sigma$ und der Richtung s aus dieser Definition die von Einstein-Großmann angegebene und rein analytisch abgeleitete Formel für die Divergenz des symmetrischen Tensors ergibt.

Das Volumelement $\Delta \Sigma$ werde zu diesem Zweck als Parallelepipet gewählt, dessen Kanten in die Richtungen der wachsenden kontravarianten Koordinaten fallen. Sie sind also dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 und es ist

$$\Delta \Sigma = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \sqrt{g},$$

wo g der Wert der Determinante der g_{ik} ist.

Die Begrenzungen von $\Delta \Sigma$ sind dann die dreidimensionalen Parallelepipede $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \Delta S_4$ mit den Kanten $dx^1, dx^2, dx^3, dx^1, dx^2, dx^4; dx^1, dx^3, dx^4; dx^2, dx^3, dx^4$, sowie die ihnen gegenüberliegenden und es ist

$$\Delta S_1 = dx^2 dx^3 dx^4 \sqrt{g^{11}};$$

denn $g^{11}g$ ist die Unterdeterminante von g_{11} .

Oder

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{11}}}{dx^1},$$

allgemein

$$\Delta S_i = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{ii}}}{dx^i}.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die 8 dreidimensionalen Parallelepipede und zwar bei festgehaltener Richtung s . Dann muß in Betracht der Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

der Einheitsvektor η in dieser Richtung beim Übergang vom Punkt P zum Punkt P' , der unendlich benachbart sein soll, gewisse Zuwächse erfahren, die gegeben sind durch

$$(14) \quad \delta \eta^i = - \sum_{rs} \left\{ \begin{matrix} r s \\ i \end{matrix} \right\} \eta^r \delta x^s,$$

wobei die δx^s die kontravarianten Komponenten des Vektors PP' sind.

Ferner soll nach der Definition von $\text{Div}_s T$ die Richtung n die der Normalen auf der Begrenzung von $\Delta \Sigma$ sein. Ist wieder ζ der in die n -Richtung fallende Einheitsvektor, so muß ζ also auf den Parallelepipeden $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ und ΔS_4 , bzw. auf den diesen gegenüberliegenden, jeweils senkrecht stehen. Der Vektor ζ , der auf den Achsenrichtungen 2, 3, 4 senkrecht steht, hat aber die kovarianten Komponenten $\zeta_1, 0, 0, 0$. Da er Einheitsvektor sein soll, so ist $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$. Entsprechendes gilt für ζ , wenn er auf den anderen Parallelepipeden senkrecht steht.

Wird nun $T_{,n}$ ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors, also $T_{,n} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k$ gesetzt und wird ferner die s -Richtung in eine der Achsenrichtungen, z. B. die Richtung 1 gelegt, so ergibt sich als Wert der Komponente $T_{,n}$ für das Parallelepiped ΔS_1 , das vom Punkt P ausgeht

$$T_{11} = t_1^1 \eta^1 \zeta_1 = t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}},$$

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 14. S. 100

und als Wert von $T_{,n}$ für das Parallelepipid $\overline{\Delta S_1}$, das vom Punkt P' ausgeht,

$$\bar{T}_{11} = \sum_i \bar{t}_i^1 \bar{\eta}^i \bar{\xi}_1 = \sum_i \bar{t}_i^1 (\eta^i + \delta \eta^i) \bar{\xi}_1,$$

wobei durch die Striche angedeutet werden soll, daß die Werte für den Punkt $(x^1 + dx^1, x^2, x^3, x^4)$ statt für den Punkt (x^1, x^2, x^3, x^4) zu nehmen sind.

Wird also der zu berechnende Grenzwert für das Parallelepipid (dx^1, dx^2, dx^3) und das ihm gegenüberliegende gebildet, wobei bei diesem Übergang zu setzen ist: $\delta x^1 = dx^1$, $\delta x^2 = dx^2$, $\delta x^3 = dx^3$, $\delta x^4 = 0$, so ergibt sich daraus zur Berechnung von $\text{Div}_1 T$ der Anteil

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \left(T_{11} \frac{\Delta S_1}{\Delta \Sigma} + \bar{T}_{11} \frac{\Delta \bar{S}_1}{\Delta \bar{\Sigma}} \right) \\ &= -t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\sqrt{g^{11}} g}{dx^1 \sqrt{g}} + \bar{t}_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}} \frac{\sqrt{\bar{g}^{11}} \bar{g}}{dx^1 \sqrt{\bar{g}}} \\ & \quad - \sum_i \bar{t}_i^1 \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{dx^1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}} \frac{\sqrt{\bar{g}^{11}} \bar{g}}{dx^1 \sqrt{\bar{g}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} (t_1^1 \sqrt{g}) - \sum_i t_i^1 \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ i \end{smallmatrix} \right\} \sqrt{g} \right). \end{aligned}$$

Allgemein berechnet sich für ein Parallelepipid ΔS_m und das ihm gegenüberliegende der Anteil

$$\frac{1}{\sqrt{g g_{11}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} (t_1^m \sqrt{g}) - \sum_i \left\{ \begin{smallmatrix} 1m \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right).$$

Also ist

$$\text{Div}_1 T = \frac{1}{\sqrt{g} \sqrt{g_{11}}} \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} (t_1^m \sqrt{g}) - \sum_{im} \left\{ \begin{smallmatrix} 1m \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right)$$

und die Komponente von $\text{Div} T$ nach einer beliebigen Achse

$$(13a) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} (t_k^m \sqrt{g}) - \sum_{im} \left\{ \begin{smallmatrix} km \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right),$$

wenn dabei noch die Maßbestimmung $ds_k = \sqrt{g_{kk}} dx^k$ auf der k -Achse berücksichtigt wird, also die Orthogonalprojektion von $\text{Div} T$ auf die k -Achse nicht im Einheitsmaßstab gemessen wird, sondern so, wie es die allgemeine Maßbestimmung in dem betreffenden Koordinatensystem verlangt.

Durch diese Formel ist die Komponente von $\text{Div } T$ nach der k -Achse ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors in dem jeweiligen Koordinatensystem.

Soll aber die k -Komponente von $\text{Div } T$ durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} oder durch die kovarianten Komponenten t_{ik} ausgedrückt werden, so sind bei gleicher Wahl des Parallelepipedes

$$T_{,n} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k,$$

bzw.

$$T_{,n} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k$$

bei der Berechnung des Grenzwertes einzuführen. Dabei unterscheidet sich die Rechnung von der obigen im ersten Fall dadurch, daß statt der kontravarianten Komponenten η^i und $\delta \eta^i$ die kovarianten Komponenten η_i und $\delta \eta_i$ zu benutzen sind, im zweiten Fall statt der Komponenten ξ_i die Komponenten ξ^i . Die Rechnung ergibt:

$$(13b) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t^{im} \sqrt{g}) g_{ki} - \sum_{im} t^{mi} \sqrt{g} \left[\begin{matrix} km \\ i \end{matrix} \right] \right)$$

bzw.

$$(13c) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t_{ki} g^{mi} \sqrt{g}) - \sum_{ilm} t_{il} g^{mi} \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} km \\ i \end{matrix} \right\} \right).$$

Dies sind aber die Formeln, die A. Einstein in „Die formale Grundlage der Relativitätstheorie“, Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1914, XLI angegeben hat. Und zwar erhält Einstein diese Formeln, indem er aus dem Tensor 2. Ranges durch Differentiation erst die „Erweiterung“ des symmetrischen Tensors, also einen Tensor 3. Ranges bildet und an diesem Tensor 3. Ranges zusammen mit dem Fundamentaltensor δ_μ^ν die innere Multiplikation durchführt. Diese Bildungsweise läßt aber den eigentlichen Zusammenhang zwischen dem symmetrischen Tensor 2. Ranges und seiner Divergenz nicht erkennen, während durch die hier gegebene Ableitung der Divergenz dieser Zusammenhang klar hervortritt. Es zeigt sich also, daß auch im Riemannschen Raum eine geometrische Darstellung von Vektoren und Tensoren dazu

führen kann, besseren Einblick in die Eigenschaften dieser Gebilde zu erhalten, wie die rein analytische Betrachtungsweise.

Allgemein hat schon F. Jung gezeigt¹⁾, wie mittels Integration über die $(n - 1)$ dimensionale Begrenzung eines n -dimensionalen Volumens im Raum von n -Dimensionen auf Tensoren anwendbare Differentialoperationen abgeleitet werden können. Dieser von Jung „Feldableitung“ genannte, allgemein definierte Grenzübergang umfaßt als Spezialfall auch die hier gegebene Ableitung der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. Jedoch bietet die hier gegebene Ableitung insofern Neues, als sie auf einer geometrischen Darstellung des Tensors selbst beruht, während bei Jung von einer Darstellung der Tensoren durch geometrische Gebilde nicht die Rede ist. Deshalb ist auch sein Grenzübergang nicht eigentlich geometrisch definiert, da er den Tensor, dessen Feldableitung gebildet werden soll, in keine geometrische Beziehung setzt zu der $(n - 1)$ dimensional Oberfläche, über die integriert wird, sondern nur rein analytisch angibt, daß der Tensor auf irgendeine Art multipliziert werden soll mit dem vektoriell gedachten Oberflächenelement. Dabei benützt Jung ein weitläufiges Schema des Vektorkalküls im Anschluß an die Grassmannsche Ausdehnungslehre für n -Dimensionen. In der vorliegenden Arbeit dagegen wird versucht, das Rechnen mit Vektoren und Tensoren vom euklidischen Raum in einfacher Weise auf den Riemannschen Raum zu übertragen und dabei die Tensoren auch nach der Seite ihrer Anschaulichkeit den Vektoren möglichst anzupassen.

§ 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Aus der im § 6 gegebenen Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges entspringt ein Integralsatz ähnlich dem Gausschen Satz in drei Dimensionen. Er lautet:

$$(15) \quad \int \text{Div}_k T d\Sigma = \int T_{kn} dS$$

1) F. Jung, „Die Feldableitungen bei allgemeinen Koordinaten“. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa. 126. Heft 10.

und gestattet ein über die dreidimensionale Begrenzung eines beliebig gestalteten vierdimensionalen Volumens erstrecktes Tensorintegral überzuführen in ein Vektorintegral über dieses Volumen. Umgekehrt kann mit Hilfe dieses Satzes ein Vektorintegral über ein vierdimensionales Volumen ersetzt werden durch ein Tensorintegral über die Begrenzung dieses Volumens, jedoch nur dann, wenn bekannt ist, daß das betreffende Vektorfeld durch die Operation Div aus einem Tensorfeld entstanden ist.

Der Beweis dieses Integralsatzes ergibt sich in bekannter Weise: Wird das Volumen Σ in die Volumelemente $d\Sigma$ geteilt, so gilt für jedes einzelne Volumelement die Gleichung (13), die auch geschrieben werden kann

$$\text{Div}_k T d\Sigma = \int T_{kn} dS.$$

Durch Summation all dieser für die einzelnen Volumelemente geltenden Gleichungen ergibt sich links $\int \text{Div}_k T d\Sigma$, rechts heben sich die Anteile der gemeinsamen Begrenzung je zweier benachbarter Volumelemente $d\Sigma$ auf, weil die Normalen für beide entgegengesetzte Richtung haben, und es bleiben bei der Summation nur die Anteile der äußeren Begrenzung S von Σ stehen, so daß sich das $\int T_{kn} dS$ über die Begrenzung S erstreckt.

Dieser Integralsatz kann dazu benützt werden, die *Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie in Integralform* zu schreiben.

Im *elektromagnetischen Feld* läßt sich die Viererkraft p , die an einem mit Elektrizität geladenen Punkte angreift, aus einem symmetrischen Tensor 2. Ranges ableiten. Es ist nämlich

$$p_i = -\text{Div}_i F.$$

Dabei baut sich der Energietensor F in bekannter Weise aus den Feldvektoren \mathcal{E} und \mathcal{H} auf.

Obiger Integralsatz auf diese Gleichungen angewendet, ergibt

$$(16) \quad \int p_i d\Sigma = - \int F_{in} dS.$$

Nun ist aber $\int p_i d\Sigma = P_i$ die i -Komponente der Gesamtviererkraft, die auf das betrachtete vierdimensionale Volumen Σ wirkt. Die Gleichungen (16) zeigen also, daß sich diese

Gesamtviererkraft berechnen läßt durch ein über die „Oberfläche“ dieses Volumens erstrecktes Tensorintegral gemäß

$$(16a) \quad P_i = - \int F_{in} dS.$$

Diese Gleichungen sind ganz analog denjenigen, die im Falle konstanten elektromagnetischen Feldes die auf ein dreidimensionales Raumgebiet wirkende ponderomotorische Kraft zu berechnen gestatten aus dem für die Oberfläche dieses Gebietes gegebenen Maxwellschen Spannungstensor. Sie sind deren vierdimensionale Erweiterung für den Fall zeitlich veränderlicher Felder. Die Viererkraft \mathfrak{P} gibt dabei durch ihre räumlichen Komponenten eben die gesamte ponderomotorische Kraft auf ein dreidimensionales Raumgebiet S' , das bei der Bewegung (oder Ruhe) das vierdimensionale Volumen Σ beschreibt.

Ebenso lassen sich bekanntlich die Impuls-Energiegleichungen der *Mechanik und Hydrodynamik* nach der allgemeinen Relativitätstheorie in der Form schreiben

$$(17) \quad p_i = \text{Div}_i R,$$

wobei R der *kinetische* Energie-Impulstensor ist. Es gilt also auch hier

$$\int p_i d\Sigma = \int R_{in} dS$$

oder

$$(17a) \quad P_i = \int R_{in} dS.$$

Im *Gravitationsfeld* beschreibt ein Punkt mit der Ruhmasse μ_0 , auf den keine äußere Kraft außer der Gravitationskraft selbst wirkt, nach Einstein eine geodätische Bahn. Die Viererkraft p verschwindet für ihn und seine Bewegungsgleichung lautet

$$(18) \quad \text{Div}_i R = 0,$$

wo $R_{ik} = \mu_0 u_i u_k$ (μ_0 Ruhmassendichte, u_i, u_k Komponenten der Vierergeschwindigkeit). R ist also in diesem Fall ein durch einen Doppelvektor darstellbarer Tensor zweiten Ranges.

Sollen nun für die *Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen* die *Impuls-Energiegleichungen* aufgestellt werden, so müssen der elektromagnetische und der kinetische Energie-Impulstensor

zu einem Energie-Impulstensor, dem *Welttensor* T vereinigt werden. Das *Prinzip von der Erhaltung der Energie* verlangt aber dann, daß die aus dem Welttensor T abzuleitende Viererkraft verschwindet, also

$$\text{Div}_4 T = 0,$$

wofür jetzt auch geschrieben werden kann

$$(19) \quad \int T_{in} dS = 0.$$

Wird nun der Welttensor T als vierdimensionaler Spannungstensor betrachtet, so läßt sich der Satz von der Erhaltung der Energie in folgender, *geometrischer Form* aussprechen:

Die metrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes werden durch die Materie derart bestimmt, daß die Gesamtviererkraft verschwindet, die auf ein vierdimensionales Volumen Σ durch die auf dessen Oberfläche wirkenden, dem Welttensor T entsprechenden Spannungen ausgeübt wird.

§ 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nicht-symmetrischen Tensor 2. Ranges.

Die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem Richtungspaar r und s war unabhängig vom Koordinatensystem definiert als Summe der Produkte der Orthogonalprojektionen der den Tensor darstellenden Doppelvektoren auf die Richtungen r und s . $T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r$. Es zeigte sich, daß die so definierte Komponente durch die Tensorkomponenten in dem jeweils der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sich ausdrückte in den Form

$$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k.$$

Daraus kann auch analytisch erkannt werden, daß T_{sr} eine invariante Bildung ist; denn wie oben erwähnt, haben die Tensorkomponenten die Eigenschaft, mit den Komponenten zweier Vierervektoren zur Bilinearform vereinigt, eine Invariante zu ergeben. Dies gilt nicht nur für den symmetrischen Tensor, sondern auch für den nichtsymmetrischen Tensor, also insbesondere auch für den antisymmetrischen. Daraus kann der Schluß gezogen werden, daß unabhängig von einer geometrischen

Darstellung für einen beliebigen Tensor 2. Ranges die Komponente nach zwei Richtungen s und r zu definieren ist durch

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

und entsprechend für die kovarianten und gemischten Komponenten, wobei also η und ζ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen sind. Dann kann aber auch für einen beliebigen Tensor 2. Ranges die Divergenz durch denselben Grenzprozeß definiert werden, wie für den symmetrischen Tensor, also durch

$$\text{Div}_k T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int T_{ks} dS}{\Delta \Sigma}$$

und die aus dieser Definition für ein bestimmtes Koordinatensystem abgeleiteten Gleichungen (13a), (13b), (13c) gelten ebenso für den symmetrischen, wie für den nichtsymmetrischen Tensor. In der Tat sind sie diejenigen Formeln, die Einstein auch für den nichtsymmetrischen Tensor angibt. Der Weg aber, der zu der Erkenntnis führt, daß die Invariante $\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$ als Komponente des Tensors auch den Richtungen der Vektoren η und ζ zu betrachten sei, ist der der geometrischen Darstellung.

Insbesondere wird für den antisymmetrischen Tensor wegen $t^{ik} = -t^{ki}$ die Komponente nach den Richtungen s und r

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

$p_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$ sind aber die Komponenten des speziellen Sechservektors, der geometrisch durch das von den beiden Vektoren η und ζ bestimmte Parallelogramm dargestellt wird. Nun bleiben aber die p_{ik} ungeändert, wenn η und ζ sich in derselben Ebene irgendwie ändern, wobei nur der Flächeninhalt des durch sie bestimmten Parallelogramms derselbe bleiben muß. Es bleibt dann also auch die Komponente T_{sr} ungeändert. Aus diesem Grunde läßt sich für den antisymmetrischen Tensor 2. Ranges die Komponente nach einer Ebene bilden, die bestimmt sein kann durch ein beliebiges Richtungs-paar in ihr, statt wie beim symmetrischen Tensor die Komponenten nach einem festen Richtungs-paar. Dies ergibt sich unabhängig von der geometrischen Darstellung des antisymmetrischen Tensors. Nun läßt sich aber der antisymmetrische

Tensor oder allgemeine Sechservektor geometrisch darstellen durch zwei aufeinander senkrechte Flächenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Orientierung im Raum. Die Komponente des antisymmetrischen Tensors nach einer beliebigen Ebene ist dann geometrisch definiert durch die Summe der Orthogonalprojektionen der beiden Flächenstücke auf die betreffende Ebene.¹⁾ Es ist leicht einzusehen, daß diese geometrische Definition der Komponente des antisymmetrischen Tensors analytisch sich ausdrückt durch eben die Bildung

$$\sum_{ik} \epsilon^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

Da der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges immer in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Tensor zerlegt werden kann, so kann der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges dargestellt werden durch vier Doppelvektoren zusammen mit zwei aufeinander senkrechten Flächenstücken von bestimmtem Inhalt. Die Komponente des nichtsymmetrischen Tensors nach einem beliebigen Richtungs paar ist also geometrisch definiert als Summe aus den Produkten der Orthogonalprojektionen der Doppelvektoren auf die beiden Richtungen und aus den Orthogonalprojektionen der beiden Ebenenstücke auf die durch die zwei Richtungen bestimmte Ebene.

A. Sommerfeld hat für den Fall der pseudo-euklidischen Geometrie in vier Dimensionen die Divergenz des allgemeinen Sechservektors f definiert²⁾ durch den Grenzübergang

$$\text{Div}_s f = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} f \cdot d\sigma}{\Delta S},$$

dabei ist ΔS ein beliebig gestaltetes dreidimensionales Volumen in dem ebenen Raum S senkrecht zur Richtung s , $d\sigma$ ist das Element der zweidimensionalen Begrenzung von ΔS , n die Richtung der Normalen auf $d\sigma$ im Raum S .

Es wäre für den Fall der pseudo-euklidischen Geometrie ebenso gut möglich, die Divergenz des Sechservektors durch den Grenzübergang zu definieren, der oben für die Definition

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 32. S. 749. 1910.

2) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. § 5. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

der Divergenz des symmetrischen Tensors verwendet wurde, also durch

$$\text{Div}_s f = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta \Sigma} f_{,n} dS}{\Delta \Sigma}.$$

Eine nähere Betrachtung, die hier jedoch nicht durchgeführt werden soll, zeigt nämlich, daß die durch die zweite Art des Grenzüberganges definierte Divergenz des Sechservektors mit der durch den ersten Grenzübergang definierten identisch ist, nicht nur für den Fall der pseudo-euklidischen Geometrie, sondern überhaupt im Riemannschen Raum von vier Dimensionen.¹⁾ Es ist dies jedoch nur für den antisymmetrischen Tensor der Fall. Für den symmetrischen Tensor 2. Ranges wäre durch die zweite Art des Grenzüberganges ein anderer Vierervektor definiert wie durch die erste Art. Oder die beiden Grenzübergänge würden angewandt auf den symmetrischen Tensor zwei verschiedene Differentialoperationen bedeuten.

Es gelten, wie schon erwähnt, die Formeln (13a, b, c) auch für den antisymmetrischen Tensor. Denn bei ihrer Ableitung für den symmetrischen Tensor wurde die Symmetrieeigenschaft der Komponenten $t^{ik} = t^{ki}$ nicht benützt. Wird nun andererseits berücksichtigt, daß für den antisymmetrischen Tensor $t^{ik} = -t^{ki}$, so führt dies in den Formeln (13a, b, c) zunächst zwar zu keiner Vereinfachung. Wird aber von den kovarianten Komponenten von $\text{Div } T$ zu den kontravarianten Komponenten übergegangen, so ergibt die Umformung allgemein

$$(13d) \quad \text{Div}^i T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g} t^{lm}) + \sum_{lk} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} t^{lk} \sqrt{g} \right),$$

und hier fällt für den antisymmetrischen Tensor wegen der Symmetrie der Ausdrücke $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ bezüglich der Indizes i und k das zweite Glied der Gleichung weg, so daß allein bleibt

$$\text{Div}^i f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{lm} \frac{\partial (\sqrt{g} f^{lm})}{\partial x^m}.$$

1) Diese, sowie einige andere an das Thema dieser Abhandlung sich anschließenden Betrachtungen sind durchgeführt in der oben zitierten Dissertation des Verfassers.

§ 9. Definition der Divergenz des Tensors n ten Ranges.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß für den Tensor 2. Ranges die Invariante

$$\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren η und ζ zu betrachten ist.

Nun bilden die Komponenten des Tensors n ten Ranges zusammen mit den Produkten aus n Vektorkomponenten zur Form n ten Grades vereinigt eine Invariante:

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Denn die Tatsache, daß diese Form eine Invariante ist, ist gleichbedeutend mit dem für die Komponenten des Tensors n ten Ranges geltenden Transformationsgesetz, wonach sich nämlich die Komponenten des Tensors n ten Ranges transformieren wie die Produkte aus n Vektorkomponenten.

Die für den Tensor 2. Ranges gewonnenen Ergebnisse legen es daher nahe, auch für den Tensor n ten Ranges die invariante Bildung

$$(20) \quad T_{s_1 s_2 \dots s_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_n}$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots$ bis η_{i_n} zu betrachten. Denn der Tensor n ten Ranges muß die Eigenschaft haben, daß sich für ihn eine Komponente nach n beliebigen Richtungen bestimmen läßt. Damit ist die Bedeutung der Komponentenbildung für sämtliche Tensoren, zu denen auch der Tensor 1. Ranges, der Vierervektor gehört, einheitlich festgelegt.

Hiernach kann aus dem Tensor n ten Ranges durch denselben Grenzübergang wie beim Tensor 2. Ranges ein Tensor $n-1$ ten Ranges, die Divergenz des Tensors n ten Ranges abgeleitet werden. Sie ist zu definieren durch

$$(21) \quad \text{Div}_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int T_{s_1 s_2 \dots s_{n-1} N} dS}{\Delta \Sigma}.$$

Dabei haben $\Delta \Sigma$ und dS die gleiche Bedeutung wie oben, N ist die Richtung der Normalen auf dS . $s_1, s_2 \dots$ bis s_{n-1}

sind die $n-1$ -Richtungen, die bei der Integration festzuhalten sind und nach denen die Komponente des Tensors $(n-1)$ ten Ranges gebildet wird.

Auf den so entstandenen Tensor $(n-1)$ ten Ranges läßt sich selbstverständlich wieder die Operation *Div* anwenden. Durch wiederholte Anwendung desselben Grenzüberganges läßt sich also aus einem Tensor n ten Ranges ein Tensor von entsprechend niedrigerem Range ableiten. Durch n -malige Anwendung der Operation *Div* kann insbesondere aus dem Tensor n ten Ranges ein Skalar gewonnen werden.

(Eingegangen 7. August 1919.)

5. *Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln; von Erwin Schrödinger.*

1. *Einleitung.*

Eine Reihe theoretischer Erwägungen¹⁾ sprechen dafür, daß wir uns die Aussendung von Licht vielleicht aus *gerichteten* Elementarprozessen zusammengesetzt zu denken haben, derart, daß bei jedem Emissionsakt nur in einen kleinen, eventuell sehr kleinen Raumwinkel gestrahlt wird. Wenn dem so ist, so sollte man glauben, daß das in den Kohärenzverhältnissen der von einem Volumelement eines Selbstleuchters ausgehenden Strahlung zutage treten müßte. Strahlen, welche unter großem Winkel gegeneinander ausgegangen sind, dürften, wenn man sie in geeigneter Weise, unter hinreichend kleinem, die Beobachtung von Fransen ermöglichendem Winkel kreuzt, nicht mehr interferieren. Obwohl nun die Undulationstheorie bekanntlich von jeher das Gegenteil angenommen hat, ohne mit den Tatsachen in Widerspruch zu geraten, scheint die Frage experimentell doch noch nicht genügend geklärt, wie z. B. aus folgender Bemerkung W. Feussens²⁾ hervorgeht, die er an die Darstellung des Fresnelschen Dreispiegelversuches knüpft: „Fresnel macht noch die Bemerkung, daß man die Spiegel einander nähern müsse in dem Maße, als man den Einfall des Lichtes steiler nehme, und schreibt das dem Umstande zu, daß nur solche Strahlen als im Einklang schwingend angesehen werden könnten, welche unter sehr kleinem Winkel gegeneinander von der Lichtquelle ausgegangen seien. *Wir wissen hierüber noch nichts Bestimmtes . . .*“

Überlegt man, wie der Versuch anzustellen sei, so erkennt man sofort, daß die Abmessungen der Lichtquelle, mindestens nach zwei Dimensionen kein allzu großes Vielfaches der Wellenlänge sein dürfen, weil sonst die von den verschiedenen Ele-

1) Vgl. bes. A. Einstein, *Phys. Zeitschr.* 18, S. 121. 1917.

2) Artikel „Interferenz des Lichtes“ in Winkelmanns Handbuch, 2. Auflage, 6, S. 934. 1906.

menten der Lichtquelle erzeugten Fransensysteme nicht koinzidieren, sondern einander größtenteils zerstören, d. h. zu gleichmäßiger Helligkeit ergänzen. Derart kleine Lichtquellen werden nun in der experimentellen Optik sehr häufig benötigt, und zwar im wesentlichen stets aus dem eben angeführten Grunde. Sie werden fast immer verwirklicht durch sehr kleine Löcher oder Spalte in einem undurchsichtigen Schirm, den man von rückwärts beleuchtet. Die Kohärenz von Strahlen, die unter beträchtlichen Winkeln von solch einer kleinen Öffnung ausgehen, ist demnach schon in Tausenden optischer Versuche direkt oder indirekt festgestellt worden; ihr Bestehen — in dem bei den jeweiligen Dimensionen der Öffnung zu erwartenden Ausmaß — kann, glaube ich, über jeden Zweifel erhoben gelten.

Ebenso sicher ist, daß solche Versuche durchaus nichts über die „Gerichtetheit“ oder „Kugelförmigkeit“ der Elementarprozesse aussagen, sondern lediglich die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für den Luftraum beweisen. Nach diesem ist die „Lichterregung“ s_P in einem beliebigen Aufpunkt P diesseits des Schirmes gegeben durch ein über die freie Öffnung zu erstreckendes Oberflächenintegral

$$4\pi s_P = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{s(t-r/c)}{r} \cos(nr) - \frac{1}{r} \frac{\partial s(t-r/c)}{\partial n} \right\} dO.$$

Wie nun auch immer $s(t)$ von der Stelle dO abhängen mag, jedenfalls wirkt dieses Element im Aufpunkt P wie ein Erregungszentrum mit der Schwingung

$$- \left[\left(\frac{s}{r} + \frac{s'}{c} \right) \cos(nr) + \frac{\partial s}{\partial n} \right],$$

also ganz ähnlich wie ein lichtaussendendes Molekül nach der klassischen Theorie.

Der Versuch, die Forderung nach *Kleinheit* der Lichtquelle durch *geometrisch-optische Verkleinerung* zu erfüllen, führt um keinen Schritt weiter. Man erreicht damit zwar, daß die Kohärenz bis zu viel größeren Winkeln erhalten bleibt, und bekanntlich macht man von diesem Prinzip zur Herstellung feiner Lichtpünktchen oder Lichtlinien für Interferenz- oder Beugungsversuche mit Vorteil Gebrauch. Aber wegen des Sinussatzes, der für punktwiese Abbildung von Flächenelementen erfüllt sein muß, haben die Strahlen, welche von

dem verkleinerten *Bild* unter jenem größeren Winkel ausgehen, das Original unter so viel kleinerem Winkel verlassen, daß für die in Rede stehende Frage die Zwischenschaltung des optischen Systems gerade genau überflüssig ist.

Es schien mir darum wünschenswert, auch einmal direkt die Interferenzfähigkeit von Strahlen zu prüfen, welche eine Lichtquelle von hinreichend kleinen *Originaldimensionen* unter großen Winkeln verlassen haben. Unter geeigneten Bedingungen erhielt ich positive Resultate bis zu Winkeln von $50-60^\circ$. Erst nachträglich wurde mir bewußt, daß damit doch auch wieder ganz und gar nichts für oder gegen die Gerichtetheit des elementaren Emissionsaktes bewiesen ist, sondern wieder nur die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für eine ganz im Luftraum gelegene, den Glühdraht eng umschließende Zylinderfläche. Solange nur die Wellengleichung für den Luftraum als gültig angesehen wird, sind, so glaube ich, der Grad der „Weitwinkelkohärenz“ und die *Kleinheit des leuchtenden Querschnittes* für die durch die beiden Strahlen bestimmte Flächenrichtung ganz ebenso *wechselseitig* aneinander gebunden, ja die Aussagen über beide inhaltlich nicht verschieden, wie das bekanntlich für die von Michelson und von Fabry und Perot untersuchte *Kohärenz bei hohem Gangunterschied* und die *Monochromasie* der Lichtquelle zutrifft.

Wenn ich trotz dieser Skepsis an der Bedeutsamkeit der Versuche für die eingangs berührte Alternative doch kurz darüber berichte, so geschieht es einerseits, weil sie vielleicht an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfen, andererseits, weil sie mir eben doch die einzige Möglichkeit einer direkten experimentellen Prüfung jener Hypothese zu bilden scheinen. Sollen die Elementarprozesse gerichtet sein, so muß das Huyghenssche Prinzip, wenn man zu immer kleineren und kleineren Dimensionen übergeht — schließlich jedenfalls für eine, das einzelne lichtaussendende Molekül umschließende Kugel — versagen. Daß bei den kleinsten herstellbaren Selbstleuchtern noch nichts dergleichen zu bemerken ist, ist deshalb vielleicht doch der einmaligen Feststellung wert.

2. Elementare Theorie der Versuche.

Die Lichtquellen waren elektrisch geglühte Drähte. Das zu prüfende „Strahlenpaar“ wird durch zwei komplanare,

zum Glühdraht parallel und symmetrisch gelegene Spalte ausgeblendet und durch ein unmittelbar hinter der Spaltblende angebrachtes Objektiv unter kleinem Winkel, d. h. in beträchtlicher Entfernung gekreuzt. Untersucht wird mit einer Okularlupe die Lichtverteilung in der zum Glühdraht konjugierten Bildebene. Die Anordnung unterscheidet sich von jener, die Michelson zur Messung der Winkelgröße astronomischer Objekte ausgearbeitet hat¹⁾, nur durch die veränderten Dimensionen und dementsprechend veränderte Lage von Objekt und Bild, wodurch die — hier eben angestrebten — größeren Achsenwinkel beim Objekt bedingt werden. Die elementare Theorie, bei der wir das Objekt als ebenen leuchtenden Streifen ansehen und von der Beugungserscheinung an den Spaltblenden absehen wollen, ist kurz

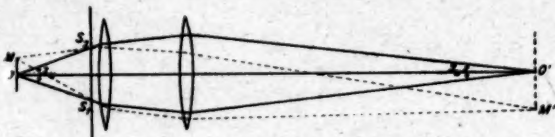


Fig. 1.

die folgende (vgl. Fig. 1, die einen horizontalen Querschnitt senkrecht zu der vertikalen Längsrichtung des Glühfadens und der Spalte darstellt). Die vom Achsenpunkt O der Lichtquelle unter $\angle S_1 O S_2 = 2u$ divergierenden Strahlen kommen im konjugierten Bildpunkt O' unter dem Winkel $2u'$ zum Schnitt. Nach dem Sinussatz ist

$$(1) \quad \frac{\sin u}{\sin u'} = V,$$

die Linearvergrößerung. Andererseits überlegt man leicht, daß zwei unter dem Winkel $2u'$ sich durchkreuzende Wellenzüge von der Wellenlänge λ ein zur Ebene der Wellennormalen senkrechtcs Fransensystem mit sinusförmiger Intensitätsverteilung und der Halbfransenbreite (Abstand vom Maximum zum Minimum)

$$(2) \quad \delta = \frac{\lambda}{4 \sin u'}$$

erzeugen. Hier liegt ein Maximum natürlich bei O' , da dorthin die optischen Wege gleich sind. — Ganz dieselbe Überlegung

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 30. S. 1. 1890; 31. S. 256. 1891.

ist — und zwar wegen der Kleinheit der Querdimensionen von Objekt und Bild mit ungeändertem u und $u' =$ auf den von O um $OM = y$ entfernten Punkt M der Lichtquelle anwendbar. Er erzeugt ein Fransensystem von gleichem δ , nur liegt das Hauptmaximum jetzt bei M' . Sei $O'M' = y'$, so ist

$$(3) \quad \frac{y'}{y} = V = \frac{\sin u}{|\sin u'|}.$$

Die Fransen werden bei wachsender Objektbreite zum erstenmal verschwinden, sobald ein *Randelement* der (zur Achse symmetrisch gedachten) Lichtquelle sein Hauptmaximum auf das erste vom zentralen Element herrührende seitliche Minimum entwirft; denn dann ergänzen sich die Fransensysteme paarweise zu gleichförmiger Helligkeit. Die erforderliche *Halbbreite* des Objekts, y , wird gegeben, indem wir δ aus (2) und y' aus (3) gleichsetzen:

$$(4) \quad \frac{\lambda}{4 \sin u'} = y \frac{\sin u}{\sin u'}.$$

Die ganze Breite ist also

$$(5) \quad 2y = \frac{\lambda}{2 \sin u}.$$

(Daß man durch vorherige optische Verkleinerung in Wahrheit nichts gewinnt, erkennt man jetzt sofort, weil dabei $\sin u$ genau in demselben Maße vergrößert, wie y verkleinert wird.) — Wächst die Objektbreite noch weiter, so erscheinen die Fransen wieder, man kann sie erzeugt denken allein durch den über die Verschwindungsbreite (5) hinausragenden Teil des Objekts. Durch die überlagerte gleichförmige Erhellung sind sie natürlich undeutlicher. Für ganze Vielfache von $\lambda/2 \sin u$ verschwinden sie immer wieder völlig, dazwischen finden sich Deutlichkeitsmaxima von zusehends abnehmender Deutlichkeit. Michelson konnte so im Laboratorium mit weißem Licht, wo die Verschiedenheit der λ s stört, bis zu 5, mit „rotem“ Licht bis zu 8 Verschwindungen beobachten.

Wird nicht die Objektbreite, sondern der Spaltenabstand

$$S_1 S_2 = b$$

variiert, so ist, wenn a der Abstand vom Objekt zur Spaltebene

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{2a}.$$

Die Fransen verschwinden, wenn die, jetzt feste, Objektbreite, sagen wir $2y_0$, ein ganzes Vielfaches von (5) ist:

$$2y_0 = \frac{n\lambda}{2\sin u},$$

also wenn

$$(6) \quad \operatorname{tg} u = \frac{b}{2a} = \frac{n\lambda/4y_0}{\sqrt{1 - n^2\lambda^2/16y_0^2}}.$$

Ist das Objekt viele Wellenlängen breit, so sind die ersten Verschwindungswinkel klein, die zugehörigen Spaltdistanzen bilden eine arithmetische Reihe

$$(6') \quad b_n = \frac{n\lambda a}{2y_0}.$$

Später oder bei kleinem Objekt wachsen sie rascher.

Bisher wurden nur die in der einen Symmetrieebene der Anordnung (Papierebene der Fig. 1) gelegenen Objektpunkte

$$\begin{aligned} \sphericalangle BOA &= \beta \\ \sphericalangle BOS_1' &= v \\ \sphericalangle S_1'OA &= \alpha \\ \sphericalangle BAS_1' &= \varphi \\ \sphericalangle AOS_1 &= u \end{aligned}$$

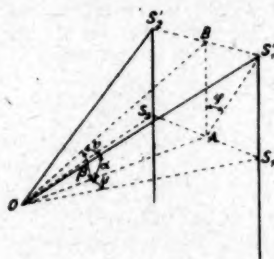


Fig. 2.

und nur der Strahlengang in dieser Ebene betrachtet. Was den ersten Umstand betrifft, so überlegt man leicht, daß die endliche Ausdehnung des Objekts senkrecht zu dieser Ebene nicht stört. Denn was eigentlich in der Bildebene $O'M'$ untersucht wird, sind die durch das optische System zur Deckung gebrachten (Fresnelschen) Beugungsbilder der beiden Spalte. Sind diese nur einigermaßen *lang* gegenüber der Breite des Einzelspalts, so sind die Querdimensionen (*senkrecht* zur Papierebene) des von jedem einzelnen Objektpunkt erzeugten Beugungsbildes verschwindend klein. Die Beugungsbilder *über-einander* gelegener Objektpunkte werden einander daher nicht stören. — Dagegen wird der *Strahlengang außerhalb der Papierebene* berücksichtigt werden müssen, sobald der Aperturwinkel u

nicht sehr klein ist. Es handelt sich im wesentlichen um die Frage nach der *zulässigen Länge der Spalte*.

Betrachten wir (vgl. die perspektivische Fig. 2) ein symmetrisches Strahlenpaar OS_1' und OS_2' , dessen Ebene mit der früher betrachteten den Winkel β macht; v sei der halbe Strahlenwinkel, α der Achsenwinkel eines Strahles, φ der der Azimutwinkel zwischen den Ebenen, in denen β und α gemessen sind. Die entsprechenden Winkel im Bildraum seien v' , α' , β' , während φ ungeändert bleibt. Aus einem sphärischen Dreieck im Bildraum folgt

$$\cos v' = \cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta' \cos \varphi.$$

Den Reziprokwert der Vergrößerung V wollen wir mit ε bezeichnen und als kleine Größe behandeln. Nach dem Sinussatz der geometrischen Optik ist

$$\sin \alpha' = \varepsilon \sin \alpha, \quad \sin \beta' = \varepsilon \sin \beta,$$

also mit Vernachlässigung von ε^4

$$\cos v' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + \varepsilon^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi.$$

v' ist also, natürlich, ebenfalls klein und man hat

$$(7) \quad \sin^2 v' = \varepsilon^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi).$$

Aus dem konjugierten sphärischen Dreieck des Objektraumes, das bei B einen rechten Winkel hat, folgt

$$\cos \varphi = \sin (BS_1' A) \cdot \cos v; \quad \sin (BS_1' A) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

mithin

$$(8) \quad \sin \alpha \cos \varphi = \sin \beta \cos v,$$

ferner

$$(9) \quad \cos \alpha = \cos v \cos \beta; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 v \cos^2 \beta.$$

(8) und (9) in (7) eingesetzt und vereinfacht:

$$(10) \quad \sin^2 v' = \varepsilon^2 [\sin^2 v + \sin^2 \beta (1 - \cos v)^2].$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen den Halbwinkeln des betrachteten Strahlenpaares im Objekt- und im Bildraum. Das von ihnen allein erzeugte Fransensystem kann, wegen der Kleinheit von β' , mit dem früheren als komplanar, natürlich auch als parallel, die Mittelstreifen als koinzidierend gelten.

Seine Halbfransenbreite, δ , ist, analog zu (2), durch $\sin v$ bestimmt:

$$\delta = \frac{\lambda}{2 \sin v}.$$

Obwohl nun die beiden, bzw. die unendlich vielen, für alle möglichen Winkel β erzeugten Frontensysteme nicht einfach ihre Intensitäten superponieren (da Kohärenz besteht), wird es doch hinreichend und wohl auch notwendig sein, zu verlangen, daß auch für das größte auftretende β noch merklich $\delta = \delta$. Dabei werden 10–20% Abweichung die Sichtbarkeit der Fransen in der Mitte des Bildes noch nicht völlig zerstören. — Man wird also verlangen, daß $\sin v$ merklich gleich $\sin u$, d. h. wegen (10) und $\sin u' = \varepsilon \sin u$, daß

$$(11) \quad \sin^2 v + \sin^2 \beta (1 - \cos v)^2 \simeq \sin^2 u$$

sei. Der Zusammenhang zwischen u und v ist aber offenbar

$$(12) \quad \sin 2v = \sin 2u \cos \beta.$$

Aus (11) und (12) kann man sich ungefähr ein Bild machen von der zulässigen Größe von β . $\beta = u$, d. h. eine Länge der Spalten gleich ihrem Abstand voneinander dürfte selbst für $u = 30^\circ$ noch erlaubt sein. Die linke Seite von (11) bekommt dann den Wert 0,173 ($= 0,171 + 0,002$), die rechte 0,25. Der Unterschied von 30–40% überträgt sich auf die δ nur mit 15–20%. Das wird die Sichtbarkeit in der Mitte noch nicht aufheben.

Über die Modifikationen, welche die oben erörterten Verschwindungsbedingungen in diesem Falle jedenfalls erfahren, könnte nur eine genauere Durchrechnung der Interferenzerscheinung Aufschluß geben. Ich unterlasse sie, weil sie für das Folgende ohne Bedeutung ist, und weil man dann auch die wahre Form des Objekts (Zylinder, nicht ebener Streifen), ferner etwas wie das Lambertsche Kosinusetz in Betracht ziehen müßte — für Interferenzrechnungen eine heikle, auch vom Standpunkte der klassischen Theorie durchaus nicht völlig klarliegende Sache.

3. Versuche mit Photoobjektiven und Wolframdrähten.

Die ersten Versuche wurden mit gewöhnlichen Metallfadenlampen, dann mit einer einfadigen Glühlampe angestellt,

aus dem dünnsten technisch verwendeten Wolframdraht, welchen die Firma Westinghouse gütigst für mich herstellen ließ. Die Spalte, aus schwarzem Papier, 0,44 mm breit, 24 mm lang, waren auf den Gleitstücken eines kleinen Längenkomparators montiert und mit Rechts- und Linksschnecke symmetrisch verschiebbar. Sie konnten einander auf 6 mm genähert werden, beim Öffnen wurde der Zwischenraum durch eine bewegliche Nase aus schwarzem Papier abgedeckt. Um die Verschiebung mit der Hand regieren zu können, ließ ich den Strahlengang an einem guten kleinen Metallspiegel reflektieren, so daß der Beobachter mit der Lupe neben den Spalten zu sitzen kommt.

Hat man den Glühdraht annähernd in die richtige Lage gebracht, so sieht man in der Pointierungsebene der Lupe die verwaschenen Beugungsbilder der beiden Spalte. Die genaue Einstellung wird durch vollständiges Zusammenlegen der beiden Hauptmaxima herbeigeführt, am genauesten bei möglichst großer Spaltendistanz b . Schiebt man die Spalte dann wieder ganz zusammen, so bemerkt man eine sehr deutliche Längsstreifung des Hauptmaximums. Bei Vergrößerung von b entspricht die Erscheinung durchaus der Erwartung. Die Breite der Fransen nimmt ab, ihre Deutlichkeit zeigt periodische Schwankungen, Maxima, die durch Stellen fast völligen Verschwindens getrennt sind. Sofern die Öffnung des Objektivs ausreicht, lassen sich drei bis vier dieser Verschwindungsstellen noch mit leidlicher Schärfe einstellen, wenn sich auch die wiedererscheinenden Fransen immer mehr auf die Mitte des Beugungsbildes beschränken. Darüber hinaus wird die Einstellung auf das Verschwinden unscharf, weil die Fransen in einem größeren b -Intervall unsichtbar werden. Spuren von Interferenz konnten, als ganz zarte, nur an einzelnen Stellen sichtbare Maserung, noch bis über die fünfte Verschwindungsstelle hinaus entdeckt werden.

Solange sie noch deutlicher sind, tritt die Polychromie der Fransen klar hervor, auch lassen sie sich in bekannter Weise spektral zerlegen, indem man sie quer auf den Spalt eines kleinen Handspektroskops auffallen läßt. Man sieht darin dann die bekannten, gegen Rot buketartig divergierenden Längsstreifen. Für die Beobachtung fand ich jedoch die lichtstärkere Erscheinung im unzerlegten Licht günstiger.

Lediglich zur Illustration lasse ich einige Messungsreihen

an verschiedenen Drähten und mit verschiedenen Objektiven folgen. In der letzten Spalte sind aus den b_n die Drahtdicken berechnet, wobei für die Wellenlänge rund $0,6 \mu$ angenommen ist.

Tabelle 1.

Distanz Spaltebene — Bildebene = 6,1 m.

Ordnungs- zahl n	Verschwin- dungsstelle b_n (cm)	$b_n/2a = \operatorname{tg} u_n$ ($= \sin u_n$)	u_n	Berechnete Drahtdicke $\pi\lambda/2\sin u_n$ in μ	Lichtquelle und Optik; Objektweite
1	0,73	0,0051	$0^\circ 17' 5$	58,4	{ Metallfadenlampe 50 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm $a = 71$ cm
2	1,51	0,0106	$0^\circ 37'$	56,4	
3	2,29	0,0161	$0^\circ 55'$	55,8	
4	3,03	0,0213	$1^\circ 13'$	56,2	
2	0,64	0,0112	$0^\circ 39'$	53,4	{ Dieselbe Lampe; zwei Protar- linsen $f = 59$ cm und $f =$ 48 cm; $a = 28,5$ cm
3	0,96	0,0168	$0^\circ 58'$	53,4	
1	1,35	0,0095	$0^\circ 33'$	31,6	{ Metallfadenlampe 25 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm; $a = 71$ cm
2	2,79	0,0196	$1^\circ 8'$	30,5	
2	1,06	0,0186	$1^\circ 4'$	32,3	{ Dieselbe Lampe; zwei Protar- linsen, $f = 59$ cm und $f =$ 48 cm; $a = 28,5$ cm
3	1,64	0,0288	$1^\circ 39'$	31,3	
	1,01	0,0177	$1^\circ 1'$	16,9	{ Einfadenlampe; dieselbe Optik; $a = 28,5$ cm
2	2,11	0,0370	$2^\circ 7'$	16,2	
1	2,60	0,0183	$1^\circ 3'$	16,4	{ Einfadenlampe; Protar $f =$ 59 cm; $a = 71,2$ cm
1	0,76	0,0188	$1^\circ 5'$	16,0	{ Einfadenlampe; Petzval-Porträt- objektiv, $f = 28,9$ cm; $a =$ 20,2 cm
2	1,52	0,0376	$2^\circ 9'$	16,0	
3	2,30	0,0570	$3^\circ 16'$	15,8	

Nachherige direkte Ausmessung im Mikroskop ergab für die, nicht sehr gleichmäßige, Dicke der Drähte folgende Werte:

	Mikroskopisch	Interferometrisch
50-Kerzenlampe	51—53 μ	55,6 μ
25-Kerzenlampe	29—30 μ	31,4 μ
Einfadenlampe	14,5—16 μ	16,2 μ

Die Übereinstimmung ist, in Anbetracht der unsicheren Annahme über die Wellenlänge, befriedigend; übrigens sind die Abweichungen nach Vorzeichen und Größenordnung durch die Wärmeausdehnung erklärbar.

Wie erwähnt, finden sich Spuren von Kohärenz auch noch bis zu größeren Winkeln u . Den größten Wert erreichte ich mit der Einfadenlampe¹⁾ und dem Petzvalobjektiv mit $a = 20,4$ cm, $b = 4,6$ cm; das entspricht $u = 6^\circ 26'$, $2u = 12^\circ 52'$ und dürfte schon mehr sein, als durch bisher vorliegende Interferenzversuche für Selbstleuchter sichergestellt ist.

4. Die mikroskopische Anordnung.

Die Hauptursache für das Verschwinden der Fransen bei größeren Winkeln ist ohne Zweifel die übergelagerte gleichförmige Erhellung, welche den immer mehr abnehmenden Helligkeitsunterschied zwischen Maximis und Minimis schließlich verdeckt. Um zu größeren Winkeln vorzudringen, mußten also dünnere Drähte und, wenn das gelingt, abbildende Systeme von größerer Apertur benutzt werden (das Petzvalobjektiv hatte etwa $2 \times 8^\circ$ Öffnung, die Protare noch weniger).

Der Versuch, Wollaston-Platindrähte von $2-4 \mu$ Dicke in einer zu diesem Zweck von der Firma Westinghouse freundlichst für mich hergestellten Lampe zum Glühen zu bringen, mißlang im Vakuum völlig; ich glaube wegen der ungleichmäßigen Dicke der Drähte, die beim Mangel jeglichen Wärmeaustausches an einer zufällig besonders dünn geratenen Stelle durchschmelzen, bevor noch ein größeres Stück ins Glühen kommt. In freier Luft dagegen gelingt es leicht, von einem 2–3 mm langen Stückchen *eine* Stelle (Bruchteile eines Millimeters) zu mäßiger Rotglut zu erhitzen und darin längere Zeit zu erhalten. Die Stelle, die ins Glühen kommt, ist offenbar die dünnste, was für unseren Zweck günstig ist. Die anzulegende Spannung ist etwa 3–5 Volt für 2 mm Gesamtlänge. Mit der Zeit scheint der Glühdraht zu zerstäuben. Das Glühen wird immer intensiver und zieht sich auf die Mitte zusammen, man muß mehr Widerstand vorschalten, um den Draht zu erhalten. Zum Schluß entsteht ein einziges, intensiv leuchtendes Pünktchen, wohl das Ideal einer punktförmigen Lichtquelle, das sich aber leider nur kurze Zeit erhalten läßt; dann schmilzt der Draht an dieser Stelle durch. Bei starker Vergrößerung im Mikroskop erweisen sich die Enden kegelförmig verjüngt gegen die Rißstelle zu.

1) Ein anderes Exemplar, für welches die b , um eine Kleinigkeit größer waren!

Für die Untersuchung in der früher benutzten Anordnung sind die Drähtchen zu lichtschwach — außer etwa im letzten Stadium, das aber viel zu labil ist, um Messungen daran auszuführen. Dagegen drängt sich, da man jetzt mit dem abbildenden System beliebig nahe heran kann, von selbst die Verwendung eines Mikroskopobjektivs auf. Man erzeugt das Streifensystem in der normalen Bildebene und verwendet als Lupe ein passendes Mikroskopokular.

Das anfängliche Bedenken, daß bei der außerordentlich verminderten Bildweite — von 6 m auf etwa 16 cm — die Fransen zu eng werden, erweist sich als unbegründet. Aus theoretischen Gründen muß die *maximale nutzbare Gesamtvergrößerung*, welche zur *numerischen Apertur* $\sin u$ gehört, eben hinreichen, um die Fransen für das Auge zu trennen. Denn nach (1) und (2) ist die Fransenbreite 2δ (Abstand von Maximum zu Maximum)

$$2\delta = \frac{\lambda}{2 \sin u} V,$$

wo V die Objektivvergrößerung. Mit einem beliebigen Okular erscheint also der Abstand der hellen Fransen dem Auge so groß, wie bei gewöhnlicher Verwendungsweise desselben Systems ein Objekt von der Länge $\lambda/2 \sin u$. Das ist aber gerade jene Länge¹⁾, die von der Apertur $\sin u$ eben noch aufgelöst wird und die die Vergrößerung für das Auge trennen, d. h. auf einen Sehwinkel von $2'$ bringen muß, um die Auflösungskraft eben auszunützen. Eine solche Vergrößerung reicht dann auch eben hin zur Trennung der Fransen. Für die Fransen handelt es sich aber dabei natürlich um einen *Minimalwert*; eine stärkere Vergrößerung kann förderlich und wird nötig sein, wenn man z. B. die Lichtverteilung zwischen den Fransen untersuchen wollte. Auch wird man damit rechnen müssen, daß in Wahrheit schon zur deutlichen Sichtbarkeit vielleicht doch etwas mehr als die eben erreichte Trennung benachbarter Maxima nötig sein wird. — Nachstehende kleine Tabelle gibt für kleine und mittlere Aperturen die theoretischen Minimalvergrößerungen ($\lambda = 0,6 \mu$):

$u =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\sin u =$	0,0872	0,1737	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428
Vergr. =	42	84	125	165	208	242	277	310

1) Vgl. z. B. P. Drude, Optik, 2. Aufl., S. 85.

Im einzelnen war die Ausführung diese:

1. *Die Drähte.* An einem auf den Mikroskopisch passenden Träger wurden in 8 mm Abstand zwei kupferne Zuleitungsdrähte parallel montiert, ihre Enden unter 45° bis auf etwa 3 mm Abstand gegeneinandergebogen. Zwischen ihnen wird in kurzem Bogen ein Stückchen Wollastondraht — natürlich vor dem Abätzen — eingelötet. Das Abätzen geschah nach dem Verfahren von Benedicks¹⁾ in heißer konzentrierter Säure, und zwar wird nur der mittlere Teil des Bogens eingesenkt, so daß die Silberhülle an den Enden erhalten bleibt. Die ganze Prozedur dauert kaum 20 Minuten und gelingt fast immer. Verwendet wurden, nach Angabe auf den Spulen, 2μ - und 4μ -Drähte, meistens die letzteren. Aus den oben angeführten Gründen ist die Glühstelle stets noch dünner als dieser Mittelwert.

2. *Die Spalte.* Sie wurden aus Stanniol anfangs aus freier Hand mit dem Taschenmesser geschnitten, später auf der Teilmaschine mit einer Giletteklinge. Man erhält so sehr schöne Spalte mit vollkommen geraden Rändern und den Spaltenabstand bis auf einige Hundertstel Millimeter nach Wunsch. Ein einziger Schnitt gibt auf Glasunterlage recht gleichmäßig Spaltenbreiten von 0,02—0,08 mm, größere Breiten erreicht man durch zwei parallele Schnitte und vorsichtige Entfernung des Mittelstreifens. Sodann wird das Stanniol auf ein dünnes Deckgläschen gekleistert — natürlich unter Aussparung der Mitte — dieses selbst auf einen passenden Korkring, mit dem es sich auf das Objektiv unter leichter Reibung aufschieben läßt, bis zur Berührung des Deckgläschens mit der Objektivfassung. Die genaue Zentrierung kann durch leichte seitliche Verdrehung des locker sitzenden Korkringes bewirkt werden, während man durch das Okular auf die erleuchteten Spalte blickt.

3. *Messung der Abstände.* Einige Schwierigkeit macht die Messung des Abstandes a (Objekt — Spaltebene), wenn er klein ist. Für größere a (mehrere Millimeter) genügt ein seitlich aufgestelltes Mikrometerfernrohr, aber bei kleinem a verursacht die unsichere Erfassung der Spaltebene von der Seite her zu große prozentuelle Fehler. In diesen Fällen

1) C. Benedicks, Phys. Zeitschr. 17. S. 319. 1916.

wurde aus Stanniol ein Fensterchen mit einem Querbalken geschnitten und in genau derselben Weise, wie sonst der Doppelspalt, auf das Objektiv aufgeschoben. Das Fensterchen läßt das Objektiv frei, bis auf den Querbalken, der die Güte der Abbildung kaum beeinträchtigt. Nun wird ein durchscheinend versilberter Außenspiegel auf den Objektstisch gelegt und einmal auf das Spiegelbild des Stanniolstreifens, dann — durch mikrometrisches Heben des ganzen Tubus — auf die Kratzer im Spiegel scharf eingestellt. Die Höhendifferenz ist offenbar die Hälfte der gesuchten Distanz.

5. Beschreibung der Mikroversuche.

Da die Spaltblenden nur einen kleinen Bruchteil des Objektivs freilassen und das wenige Licht, das eindringt, nicht zu einem scharfen Bilde vereinigt, sondern auf die breiten Beugungsfiguren der beiden Spalte verteilt wird, ist die Erscheinung äußerst lichtschwach und man muß das Zimmer gut abdunkeln und das Auge einige Zeit lang an die Dunkelheit gewöhnen, um überhaupt etwas zu sehen. Bei den stärkeren Vergrößerungen, die wegen der kleineren Objektdistanz und Spaltdistanz auch eine Verringerung der Spaltbreite nötig machen, ist eine leichte Überlastung des Drahtes nötig, der selten mehr als einen Versuch überlebt.

Da das glühende Drahtstückchen in der Regel nicht genau senkrecht zur optischen Achse steht, sieht man zwei Bilder, die sich an jener Stelle, auf die genau eingestellt ist, durchkreuzen. Es sind, wie gesagt, nicht scharfe Bilder des Drahtes, sondern die breiten Mittelmaxima der Beugungsfiguren von den beiden Spalten, wie sie, von den einzelnen Punkten des Drahtes erzeugt, sich zu zwei breiten, verwaschenen, der Form des Drahtes ähnlichen Lichtbändern zusammensetzen. In der Tat sieht man bei hellerer Glut jedes Band beiderseits von vielen schmäleren, lichtärmeren parallelen Bändern, den sekundären *Máximis*, begleitet. (Dreht man die Spalte, die natürlich dem glühenden Stück möglichst genau parallel orientiert sind, um 90° , so sieht man nur mehr *ein* viel schmäleres und schärferes *Bild* des Drahtes.) — Die uns interessierende Interferenzerscheinung, die von dem Zusammenwirken der beiden Spalte herrührt, erscheint als eine ungemein zarte, feine und scheinbar scharfe Längsstreifung im

Inneren der zentralen Maxima, dort, wo sie sich durchkreuzen; oder, wenn das Drahtstück zur Achse genau senkrecht steht, so daß es gelingt, die Maxima längs dieses ganzen Stückes zusammenzulegen, dann läuft auch die Streifung diesem ganzen Stück entlang. Bei größeren Winkeln, etwa von $u = 8-10^\circ$ aufwärts, bemerkt man die Erscheinung gewöhnlich nicht sofort; es kommt vor, daß man recht lange hinter dem Apparat sitzt, am Regulierwiderstand und an der Mikrometereinstellung herumtastet, ohne sie zu finden. Plötzlich wird man sie gewahr, meist dann, wenn man sich entschließt, den Draht doch ein wenig zu überlasten. Das anfangs vergebliche Suchen — bei vollkommen deutlicher Sichtbarkeit der beiden Lichtbänder — mag zum Teil in dem verminderten angularen Unterscheidungsvermögen des Auges bei Dunkeladaptation begründet sein. Daß man sich unterhalb der Schwelle des Tagessehens befindet, erkennt man in diesen Fällen in der Tat an der Farblosigkeit des Bildes („Grauglut“) und an den Schwierigkeiten der Fixation. Sicherlich spielt aber auch die Verminderung der Drahtdicke durch allmähliches Zerstäuben eine Rolle. Bei den Weitwinkelversuchen, etwa von 20° aufwärts, konnte ich die Streifung fast immer erst im letzten Stadium entdecken, wenn der Draht — bei großer Helligkeit an einer Stelle — schon nahe am Durchschmelzen war. Sie erstreckt sich dann nicht über die ganze Breite des Bandes, sondern ist auf die Mitte beschränkt. Auch muß man schon vorher das Stück absuchen und sich die hellste, daher dünnste Stelle auswählen, wo der Riß erfolgen wird. Diese ist dann hervorragend geeignet, um im letzten Stadium die Streifung in voller Deutlichkeit zu zeigen.

In Anbetracht dieser Schwierigkeiten war eine systematische Untersuchung der *Streifendeutlichkeit* bei stufenweiser Änderung der Spaltendistanz b nicht recht ausführbar; jedenfalls nicht ohne ein Mikrospaltenpaar mit mikrometrisch variierbarem Abstand, das ich bis jetzt nicht beschaffen konnte. Ich habe mich darum begnügt, für möglichst große Winkel u die Sichtbarkeit der Interferenzen festzustellen, ohne natürlich behaupten zu wollen, daß ich die obere Grenze erreicht hätte. Meiner Ansicht nach gibt es eine solche Grenze überhaupt nur für bestimmte Objektgröße und in Korrelation zur Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für Helligkeiten. — Nach-

folgend stelle ich die Bedingungen zusammen, unter denen die von dem Zusammenwirken der beiden Strahlenbündel erzeugte Interferenzerscheinung mit Sicherheit konstatiert werden konnte. Gesamtvergrößerung und Objektabstand a gelten für normalen Tubusauszug von 160 mm.

Tabelle 2.

Objektiv	N.A.	Okular	Vergr.	b (mm)	a (mm)	Spalt- breite (mm)	$b/2 a =$ $\lg u$	"
Zeiss, Achromat „A“	0,20	Kompens. 2	30	0,51	8,1	ca. 0,02	0,0315	1° 50'
do.	0,20	Huyghens 2	55	1,30	8,1	0,18	0,802	4° 40'
do.	0,20	„ 4	90	1,59	8,1	0,25	0,0981	5° 40'
do.	0,20	„ 4	90	2,41	8,1	0,19	0,149	8° 30'
do.	0,20	„ 4	90	2,79	8,1	0,27	0,172	9° 50'
Zeiss, Apochr. 16 mm	0,30	„ 2	60	1,29	4,7	0,18	0,137	7° 50'
do.	0,30	„ 4	100	1,70	4,7	0,19	0,181	10° 20'
Leitz, Wetzlar, Nr. 4	ca. 0,5	„ 4	170	1,25	1,86	0,18	0,336	18° 30'
do.	ca. 0,5	„ 4	170	1,58	1,86	0,18	0,425	23° 0'
do.	ca. 0,5	Reichert 12	300	1,79	1,86	0,18	0,481	25° 40'
Zeiss, Apochr. 8 mm	0,65	„ 12	330	0,51	0,62	ca. 0,02	0,411	22° 20'
do.	0,65	Kompens 18	485	0,62	0,62	ca. 0,02	0,500	26° 30'
do.	0,65	„ 18	485	0,68	0,62	0,03	0,548	28° 40'

Als Okular ist immer das schwächste angegeben, das zur Trennung der Fransen für das Auge eben noch hinreicht. Die Okularvergrößerungen sind ungefähr:

Kompens. 2	H. Nr. 2	H. Nr. 4	R. Nr. 12	Komp. 18
2	4	7	10—11	16

Die Gesamtvergrößerung liegt, wie zu erwarten, fast durchwegs zwischen dem Einfachen und Doppelten des früher angegebenen Minimalwertes.

Die Länge des Spaltenpaares war im allgemeinen nicht beschränkt, sie lief über das ganze Objektiv; für den früher mit a bezeichneten Winkel bildet dann die obere Grenze der Aperturwinkel. Nur bei den Versuchen mit Apochromat 8 mm wurde eine Beschränkung der Spalthöhe durch einen breiten Stanniolschlitz auf etwa 0,8 mm versucht und vorteilhaft befunden.

Über die wirkliche Dicke der zum Versuch dienenden Drahtstelle läßt sich aus den oben angeführten Gründen nichts ausmachen; die der Rißstelle benachbarten Teile schätze ich

nach wiederholter Inspektion mit einem Okularmikrometer auf $1-2\mu$ ($\frac{1}{8}$ bis $\frac{2}{3}$ partes, wobei 1 pars = 0,0027 mm). Dem würde ein erstes Verschwinden der Fransen bei $\sin u = 0,8-0,15$, $u = 9^\circ-17^\circ$ entsprechen.

6. Schlußbemerkung.

Schon in der Einleitung wurde hervorgehoben, daß die mitgeteilten Versuche für die Frage nach der Beschaffenheit des elementaren Emissionsaktes leider doch nicht mehr beweisen dürften, als die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzips im Luftraum. Wenn sich das Feld im Außenraum in der bekannten Weise durch Integration über die Randwerte auf einer den Draht umhüllenden Zylinderfläche berechnen läßt, dann besteht, wie immer die Elementarprozesse beschaffen sein mögen, die Funktion der Lichtquelle, mathematisch gesprochen, nur in der Vorgabe jener Randwerte. Und wenn nur *entweder* die Randwerte der Bedingung genügen, daß bei der zeitlichen Fourierzerlegung des Feldes im Außenraum bloß Glieder eines bestimmten, nicht zu großen Frequenzbereiches auftreten, *oder* aber das perzipierende Organ bloß auf diesen Frequenzbereich anspricht: dann ist, glaube ich, die Zunahme des Grenzwinkels merkbarer Kohärenz mit abnehmendem Zylinderradius eine rein mathematische Folgerung.

Übrigens läßt auch eine *thermodynamische* Erwägung — in Verbindung mit den nicht zu bezweifelnden Gesetzen der *Beugung* an Hindernissen von der Größenordnung der Wellenlänge — den positiven Ausfall unseres Interferenzversuches vorhersehen; und zwar nach dem schönen Abbildungssatz, den M. v. Laue vor einigen Jahren bewiesen hat.¹⁾

Bringen wir unseren Draht, kalt, in eine Hohlraumstrahlung, so läßt sich seine Wirkung als „Hindernis“ bekanntlich so auffassen, daß für jede der ebenen Sinuswellen, in welche sich die Hohlraumstrahlung, rein mathematisch, auflösen läßt, eine Reihe von Sekundärwellen von ihm ausgeht, deren Intensität zwar nicht von der Richtung unabhängig, aber doch — wenn der Drahtradius mit der Wellenlänge vergleichbar — für einen großen Winkelbereich von derselben Größenordnung ist. Diese Sekundärwellen nun *würden* in

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 43. S. 165. 1914.

unserem Spaltinterferometer ein Fransensystem erzeugen, das sich freilich, bei wirklich allseitiger Beleuchtung, wegen der relativ großen allgemeinen Helligkeit der Beobachtung entziehen dürfte. (Wenn man einen geeigneten Teil der beleuchtenden Bündel wegläßt — bei „Dunkelfeldbeleuchtung“ — würden sie beobachtbar sein). — Bringt man jetzt auch den Draht selbst, und zwar bei derselben Temperatur, zum Glühen, so müssen die Fransen verschwinden, weil das Instrument nun in einen gleichtemperierten Hohlraum hineingerichtet ist. Da aber zwischen der Sekundärstrahlung und der Glühstrahlung des Drahtes sicher *keine* Kohärenz bestehen kann, muß die Glühstrahlung für sich allein ein dem früheren *komplementäres* Fransensystem erzeugen.

(Eingegangen August 1919.)

**6. Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte
fester Körper;
von M. Born.**

Die elastische Kompressibilität der Halogensalze einwertiger Metalle kann durch die Annahme¹⁾ erklärt werden, daß sich die Ionen entsprechend ihren Ladungen nach dem Coulombschen Gesetze anziehen oder abstoßen und daß außerdem zwischen je zwei Ionen eine Abstoßungskraft wirkt, deren Potential der neunten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Im folgenden soll dieser Ansatz weitergeführt werden. Die Aufgabe ist die, alle übrigen physikalischen Eigenschaften solcher Kristalle aus der genannten Hypothese über die Molekularkräfte abzuleiten. Wenn dies gelingt, so bedeutet es einen Schritt in der Richtung der elektrischen Auffassung der Materie.

Als Material kommen vorläufig nur die schon früher benutzten binären Halogensalze vom Typus NaCl in Betracht, weil sie die reinste Form heteropolarer Verbindungen darstellen; nur bei solchen kann man erwarten, daß sich die Atomkräfte elektrostatisch (ohne Quantentheorie) auffassen lassen, wie Kossel²⁾ an dem Beispiel der chemischen Bindung überzeugend nachgewiesen hat.

Leider ist die Anzahl der physikalischen Konstanten, die man berechnen kann, nicht groß. Bei regulären Kristallen hat man die folgenden³⁾:

1. eine langwellige ultrarote Eigenfrequenz ω (Reststrahl);
2. den Beitrag dieser ultraroten Schwingung zur Dielektrizitätskonstante, $\epsilon - \epsilon_0$;

1) M. Born und A. Landé, Verh. d. D. Phys. Ges., 20. S. 210. 1918.

2) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916.

3) Vgl. M. Born, Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918.

3. drei Elastizitätskonstanten¹⁾ c_{11} , c_{12} , c_{44} (wobei c_{11} oder c_{12} durch die Kompressibilität κ ersetzt werden können);
4. bei azentrischen Kristallen eine Konstante c_{14} , der polaren Piezoelektrizität.

Dazu kämen noch die auch bei zentrischen Kristallen auftretende tensorielle Piezoelektrizität²⁾, die aber quantitativ noch nicht genügend erforscht ist, sowie sämtliche Vorgänge, die mit Temperaturänderung verknüpft sind, also die thermische Ausdehnung, die Temperaturkoeffizienten der unter 1., 2., 3., 4. genannten Konstanten, die Pyroelektrizität usw.; doch müssen diese noch außer Betracht bleiben, weil die Theorie der Zustandsgleichung der Kristallgitter nicht weit genug entwickelt ist.³⁾

Da das unserm Ansatz zugrunde liegende Gitter vom Typus des NaCl zentrisch symmetrisch ist, kommen nur die unter 1., 2., 3. genannten Konstanten ω , $\varepsilon - \varepsilon_0$, c_{11} , c_{12} , c_{44} in Frage. Aber es sind noch weitere Einschränkungen notwendig. Wie a. a. O.⁴⁾ gezeigt worden ist, bestehen unter der Voraussetzung, daß die Atome punktförmige Kraftzentren sind, bei zweiatomigen Gittern mit Symmetriezentrum zwei Relationen zwischen diesen fünf Größen, nämlich

$$c_{12} = c_{44}, \quad (\varepsilon - \varepsilon_0) \omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{e^2}{d},$$

wo e die Ladung der Ionen, m_1 , m_2 ihre Massen und d das Volumen der Gitterzelle ist, die ein Atom jeder Art enthält.

Die erste ist die sogenannte Cauchy'sche Relation; sie ist, wie Voigt⁵⁾ nachgewiesen hat, für den in unsere Klasse gehörigen Kristall KCl (Sylvin) nicht erfüllt. Das muß daran liegen, daß die Atome ausgedehnte Gebilde sind, die sich

1) Wir benutzen die Bezeichnungen von W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, B. G. Teubner 1910. Vgl. insbesondere Kap. VII, § 371, S. 738 und § 372, S. 741.

2) Vgl. W. Voigt, Phys. Ztschr. 17. S. 287 und 307, 1916; 18. S. 59. 1917.

3) Für quantitative Schlüsse, wie sie hier angestrebt werden, genügen die Theorien von Mie, Grüneisen und Debye nicht; ich behalte mir vor, die nötigen Ergänzungen demnächst mitzuteilen.

4) Vgl. die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

5) W. Voigt, Kristallphysik (vgl. Anm. 1), § 372, S. 744.

drehen und deformieren.¹⁾ Man kann leicht einsehen, daß diese Drehungen oder Deformationen wesentlich den Wert von c_{44} beeinflussen, während c_{11} und c_{12} nicht so stark davon betroffen werden. Daher werden wir c_{44} aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Die zweite Relation ist zuerst von Dehlinger²⁾ aufgestellt und dann von mir³⁾ unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen worden. Für die Halogensalze der Alkalimetalle bewährt sie sich einigermaßen, für die Halogensalze von Thallium und Silber aber versagt sie vollständig.⁴⁾ Woran das liegen mag, wird im folgenden (S. 102, 103) erörtert werden. Jedenfalls scheidet die Größe $\varepsilon - \varepsilon_0$ für die hier verfolgte Absicht aus.

Unser Ziel ist daher, die Frequenz ω des Reststrahls und die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} (oder statt dessen κ) aus der eingangs genannten Hypothese über die Atomkräfte zu berechnen.

Ehe man daran geht, muß man sich klar machen, wie weit man überhaupt eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erwarten darf. Die Daten, aus denen die drei Größen ω , c_{11} , c_{12} berechnet werden sollen, sind:

1. die Massen m_1 und m_2 der beiden Atome,
2. das elektrische Elementarquantum e ,
3. die Gitterkonstante δ .

Dazu kommt noch der Exponent n des Abstoßungsterms br^{-n} der potentiellen Energie; nach unseren früheren Ergeb-

1) W. Voigt (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) vertritt die Anschauung, daß es genügt, die Atome als starre Körper zu behandeln, deren Drehungen berücksichtigt werden müssen. Ich glaube, daß das optische Verhalten der Kristalle im Ultraroten, wie es auch in vorliegender Abhandlung wieder deutlich wird, dafür spricht, daß Deformationen der Atome zum mindesten dieselbe Rolle spielen wie Drehungen.

2) W. Dehlinger, Phys. Ztschr. 15. S. 276. 1914.

3) M. Born, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., 13. Juni 1918, S. 604; vgl. auch die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

4) Ich habe in der zitierten Abhandlung (Anmerkung 3) aus der Formel das Verhältnis z der Ionenladung zur Elektronenladung bestimmt; bei den Alkalisalzen ergab sich z etwas größer als 1, bei den einwertigen Tl-Salzen zwischen 3 und 4, bei den Ag-Salzen zwischen und 2.

nissen soll $n = 9$ sein, doch lassen wir den Wert für den Augenblick unbestimmt.

Dann ergibt eine einfache Dimensionsbetrachtung, daß man zu Formeln folgender Art gelangen muß:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{e^2}{\delta^3} f(n),$$

$$c_{11} = \frac{e^2}{\delta^3} f_1(n), \quad c_{12} = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n);$$

dabei sind $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ dimensionslose Größen, deren Zahlenwert noch von n abhängt. Wenn n gewählt ist, so kommen die Unterschiede der einzelnen Kristalle nur noch durch die Gitterkonstante δ zum Ausdruck, und es ist klar, daß man an so primitive Formeln keine allzu hohen Ansprüche stellen darf. Man sieht nun aber, daß die angegebenen Ausdrücke nur dann in die richtige Größenordnung führen, wenn die Zahlenwerte von f , f_1 , f_2 etwa 20–30 betragen; die Frage ist also, ob der für die Kompressibilität gefundene Wert $n = 9$ dies leistet. Wenn dies der Fall ist, so ist damit mehr als eine triviale Größenordnungsbeziehung gewonnen. Wir werden sehen, daß die Theorie diese Forderung erfüllt. Leider ist das Beobachtungsmaterial, besonders bei den Elastizitätskonstanten, noch wenig umfangreich und gestattet nur eine beschränkte Prüfung der Formeln; aber es genügt, um den Glauben an die elektrische Natur der Kohäsionskräfte zu befestigen.

§ 1. Die Gleichgewichtsbedingung.

Um in Übereinstimmung mit den früheren Arbeiten zu bleiben, bezeichnen wir den Abstand zweier gleichartiger Atome in der Richtung der Würfelkante mit δ . Als Elementarparallelogramm (Zelle) des Gitters¹⁾ wählt man aber am besten

1) Die Bezeichnungen und Benennungen sind bis auf geringfügige Abänderungen dieselben, die ich in meinem Buche „Dynamik der Kristallgitter“, Leipzig, B. G. Teubner 1915, gebraucht habe. In folgenden Punkten weiche ich hier davon ab: 1. Ich rechne nicht mit dem „Obergitter“, dessen Zelle das Volumen 1 hat, sondern mit dem wirklichen Gitter. 2. Zur Festlegung einer Zelle im Gitter gebrauche ich nicht drei Indizes l, m, n , sondern einen Index l , der oben geschrieben wird; er ersetzt symbolisch jene drei Indizes, die ich hier mit l_1, l_2, l_3 bezeichne. 3. Die Indizes k, k' , welche die verschiedenen Par-

nicht den Würfel von der Kantenlänge δ , der vier Atome jeder Art enthält, sondern ein Rhomboeder, dessen Kanten zu den Verbindungen einer Würfecke mit den Mittelpunkten der drei Nachbarflächen parallel sind (Fig. 1); diese Zelle enthält je ein Atom von beiden Arten. Ist ihr Volumen Δ , so gilt

$$(1) \quad 4\Delta = \delta^3.$$

Die Gitterpunkte kann man auf die Kanten dieses Rhomboeders als schiefwinklige Achsen beziehen; bequemer ist es, sie durch die rechtwinkligen Koordinaten parallel zu den Würfelkanten zu kennzeichnen. Der Vektor von irgendeinem

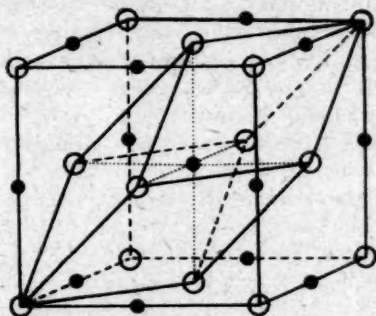


Fig. 1.

Gitterpunkte k zu irgendeinem anderen k' ($k, k' = 1, 2$) sei $r_{kk'}$, mit den Komponenten

$$(2) \quad x_{kk'}^{(i)} = \frac{\delta}{2} l_1, \quad y_{kk'}^{(i)} = \frac{\delta}{2} l_2, \quad z_{kk'}^{(i)} = \frac{\delta}{2} l_3,$$

wo l_1, l_2, l_3 ganze Zahlen sind, deren Summe gerade ist, wenn die beiden Atome gleicher Art, aber ungerade, wenn sie verschiedener Art sind:

$$(2') \quad l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = 1, k' = 1 \text{ und } k = 2, k' = 2, \\ \text{ungerade für } k = 1, k' = 2 \text{ und } k = 2, k' = 1. \end{cases}$$

Wir nehmen nun an, daß die Atome 1 (Metallatome) die positive Ladung $+e$, die Atome 2 (Halogenatome) die negative Ladung $-e$ tragen; dann bestehen zwischen je zwei

Ortstypen voneinander unterscheiden, schreibe ich unten an. Bringt man diese Änderungen der Bezeichnung an, wird man leicht die Formeln des Buches wiedererkennen (ich zitiere dieses im folgenden als D. K.).

Atomen Coulombsche Anziehungen oder Abstoßungen. Außerdem soll noch eine Wirkung zwischen je zwei Atomen vorhanden sein, die das Zusammenstürzen verhindert und näherungsweise als Zentralkraft angesehen werden soll, die einer höheren Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist. Wir setzen daher die gesamte potentielle Energie zwischen zwei Atomen k, k' gleich

$$(8) \quad \varphi_{kk'} = \pm e^2 r^{-1} + b_{kk'} r^{-n}, \quad b_{k'k} = b_{kk'}.$$

Dabei gilt das $+$ -Zeichen im ersten Gliede für $k = k'$, das $-$ -Zeichen für $k \neq k'$. Ferner muß für benachbarte Atome verschiedener Art jedenfalls $b_{12} > 0$ sein, damit das zweite Glied eine Abstoßung bedeutet; dagegen kann man das Vorzeichen von b_{11} , b_{22} zunächst offen lassen, da die Wechselwirkung der nächstbenachbarten Atome gleicher Art wegen ihres größeren Abstandes schon so gering sein wird, daß es für die Stabilität des Gitters gleichgültig ist, ob sie sich anziehen oder abstoßen.

Wir berechnen nun zunächst die potentielle Energie des Gitters pro Zelle Δ . Den elektrostatischen Anteil können wir den früheren Arbeiten¹⁾ entnehmen, wo er nach der Methode von Madelung²⁾ berechnet worden ist (vgl. auch den Anhang); wir fanden dort für die elektrostatische Energie des Gitters pro Elementarwürfel der Kante δ den Wert $a \delta^{-1}$ mit

$$(4) \quad a = 13,94 e^2.$$

Die elektrostatische Energie pro Zelle Δ ist der vierte Teil davon.

Die gesamte elektrostatische Energie pro Zelle Δ im Gleichgewicht ist daher³⁾

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \varphi_{kk'}^{(l)}, \\ &= -\frac{a}{4} \delta^{-1} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} b_{kk'} (r_{kk'}^{(l)})^{-n}, \end{aligned}$$

wo $\varphi_{kk'}^{(l)}$, die potentielle Energie (8) zwischen zwei Gitterpunkten k, k' im Gleichgewichtsabstande

1) M. Born und J. A. Landé, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1918. S. 1048. Vgl. auch die S. 87, Anm. 1 zitierte Abhandlung.

2) E. Madelung, Phys. Ztschr. 19. S. 524. 1918.

3) Der Summationsindex l bedeutet eine Summation über alle ganzzahligen Werte der drei Indizes l_1, l_2, l_3 ; vgl. Anm. 1, S. 90.

$$r_{kk'}^{(1)} = \frac{\delta}{2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = k', \\ \text{ungerade für } k \neq k' \end{cases}$$

bedeutet. Wir führen nun die Summen

$$(5) \quad \begin{cases} S_1(n) = \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = 6 + 8 \cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 24 \cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 30 \cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \dots, \\ S_2(n) = \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = 12 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 6 \cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 24 \cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 12 \cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \dots \end{cases}$$

und die Bezeichnungen

$$(6) \quad b_{12} = b, \quad \frac{b_{11} + b_{22}}{2b_{12}} = \beta$$

ein; dann wird:

$$(7) \quad \Phi = -\frac{a}{4} \delta^{-1} + b \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} (S_1(n) + \beta S_2(n)).$$

Im Gleichgewicht muß Φ als Funktion von δ ein Minimum sein; daraus folgt:

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = \frac{a}{4} \delta^{-2} - \frac{nb}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1} (S_1(n) + \beta S_2(n)) = 0.$$

Hieraus berechnen wir die Konstante b der Abstoßungskraft durch den Gleichgewichtswert von δ :

$$(8) \quad b = \frac{a}{8n} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}.$$

Die Konstante β bleibt unbestimmt; sie ist nach (6) von der Größenordnung 1. Da für größere Werte von n die Summe $S_2(n)$ klein gegen $S_1(n)$ ist, so spielt β keine ausschlaggebende Rolle.

§ 2. Die Kompressibilität.

Die physikalische Konstante, die man am einfachsten aus dem Potential (7) berechnen kann, ist die Kompressibilität.¹⁾ Drückt man Φ mit Hilfe von (1) als Funktion des Zellenvolumens Δ aus

1) Vgl. die S. 87, Anm. 1 u. S. 92, Anm. 1 zitierten Abhandlungen.

$$\Phi = -\frac{a}{8} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} + b \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{n}{3}} (S_1(n) + \beta S_2(n)),$$

so ist der Druck

$$p = -\frac{d\Phi}{dd} = -\frac{a}{48} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b \frac{n}{6} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}} (S_1(n) + \beta S_2(n)).$$

Die Kompressibilität κ ist dann definiert durch

$$\frac{1}{\kappa} = -\Delta \frac{dp}{d\Delta} = -\frac{a}{36} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b \frac{n(n+3)}{18} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}} (S_1(n) + \beta S_2(n)).$$

Setzt man hier den aus (8) folgenden Wert

$$b = \frac{a}{8n} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{a}{36} \cdot \frac{n-1}{4} \left(\frac{d}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{a(n-1)}{9\delta^4},$$

also

$$(9) \quad \kappa = \frac{9\delta^4}{a(n-1)} = \frac{9}{13,94(n-1)} \cdot \frac{\delta^4}{e^3},$$

übereinstimmend mit unserer früheren Berechnung.

Die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} hängen bekanntlich mit κ durch die Relation¹⁾

$$(10) \quad c_{11} + 2c_{12} = \frac{8}{\kappa}$$

zusammen; es genügt also, die eine von ihnen zu berechnen (vgl. § 4).

§ 3. Die ultraroten Eigenschwingungen (Reststrahlen).

Bei Kristallen des regulären Systems sind die Schwingungen parallel zu den Würfelkanten miteinander nicht gekoppelt. Sind u_1 und u_2 die Amplituden der beiden Atomarten bei einer parallel zur x -Achse schwingenden Welle von der Frequenz ω , so gelten Gleichungen der Form²⁾

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 u_1 + D \Delta (u_2 - u_1) &= 0, \\ m_2 \omega^2 u_2 + D \Delta (u_1 - u_2) &= 0, \end{aligned}$$

1) Vgl. W. Voigt, Kristallphysik § 372, S. 738, Formeln (442), (444).

2) Vgl. D. K. Formeln (150), S. 62; vgl. auch M. Born (zitirt Anm. 3, S. 87), Formel (27), ff., woher die Bezeichnung D übernommen ist.

wo der Koeffizient D von den Molekularkräften abhängt; daraus folgt für die Frequenz:

$$(11) \quad \omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) D \Delta.$$

Um D zu berechnen, bilde man zunächst aus den Potentialen (3) die Größen¹⁾:

$$(12) \quad \begin{cases} P_{kk'}^{(l)} = \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi_{kk'}}{dr} \right) r_{kk'}^{(l)}, \\ Q_{kk'}^{(l)} = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d\varphi_{kk'}}{dr} \right] \right) r_{kk'}^{(l)} \end{cases}$$

und daraus die von den Ionen der ersten auf die der zweiten Art pro Volumeneinheit ausgeübte Kraft²⁾:

$$(13) \quad D = \frac{1}{\Delta} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (P_{12}^{(l)} + Q_{12}^{(l)} x_{12}^{(l)}).$$

Doch gelten diese Formeln ohne weiteres nur für den zweiten Term der potentiellen Energie, der die Abstoßung darstellt und einer höheren als der (-1) ten Potenz der Entfernung proportional ist. Der elektrische Anteil der potentiellen Energie erfordert wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Schwingungen eine besondere Behandlung [vgl. Anhang, Formel (b)]; man findet, daß er zu $D \Delta$ den Beitrag

$$- \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{e^2}{\Delta} = - \frac{2\pi}{3} e^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)^{-3}$$

liefert. Daher erhält man:

$$\begin{aligned} D \Delta = & - \frac{2\pi}{3} e^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)^{-3} - n b \left(\frac{\delta}{2} \right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}} \\ & + n(n+2) b \left(\frac{\delta}{2} \right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}} l_1^2. \end{aligned}$$

Nun ist offenbar

$$3 \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}} l_1^2 = \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}} = S_1(n+2).$$

1) Vgl. D. K., Formeln (14), S. 21.

2) Vgl. D. K., Formeln (18) und (25); die hier D genannte Größe heißt dort $A_0^{(1,2)}$.

Folglich wird

$$D\Delta = -\frac{2\pi}{3}e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} + \frac{n(n-1)}{3}bS_1(n+2)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)}.$$

Setzt man hier den Ausdruck (8) für b ein, so bekommt man

$$D\Delta = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} \left\{ -2\pi e^2 + \frac{(n-1)a}{8} \cdot \frac{S_1(n+2)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} \right\}.$$

Indem man noch den Wert (4) für a einführt, erhält man für das Quadrat der Frequenz nach (11):

$$(14) \quad \omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \frac{e^2}{\delta^3} \cdot f(n),$$

wo

$$(15) \quad f(n) = \frac{1}{3} \left(13,94 \frac{(n-1)S_1(n+2)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 16\pi \right)$$

gesetzt ist.

§ 4. Die Elastizitätskonstanten.

Von den Elastizitätskonstanten c_{11} , c_{12} läßt sich c_{11} direkt berechnen, weil der elektrische Anteil nach der Methode von Madelung gewonnen werden kann; für c_{12} ist das nicht ohne weiteres möglich, aber auch nicht nötig, weil durch die Formel (10) c_{12} auf c_{11} und κ zurückgeführt wird.

c_{11} wird durch folgende Summe dargestellt¹⁾:

$$(16) \quad c_{11} = \frac{1}{2A} \sum_k \sum_{k'} Q_{kk'}^{(0)} x_{kk'}^{(04)}.$$

Der elektrische Anteil davon wird im Anhang besonders berechnet; er hat den Wert $-20,42 e^2 \delta^{-4}$ [Anhang, Formel (k)].

Führt man nun die Summen

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1(n) &= \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \\ &= 2 \left\{ 1 + 4 \cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 68 \cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 213 \cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \dots \right\} \\ C_2(n) &= \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \\ &= 2 \left\{ 4 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 16 \cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 72 \cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 64 \cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. D. K., Formeln (18), (26), (42), (51), (57). Es sind hier die Größen $a_1^{(k)}$, ... sämtlich gleich Null und die a_{11} , ... direkt die Elastizitätskonstanten.

ein, so erhält man:

$$c_{11} = -20,42 e^2 \delta^{-4} + \frac{1}{d} n(n+2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} b (C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)).$$

Mit dem Wert (8) von b wird das zu:

$$(18) \quad c_{11} = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n),$$

wo

$$(19) \quad f_1(n) = 13,94(n+2) \frac{C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 20,42$$

gesetzt ist. Aus (10) folgt dann

$$(20) \quad c_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\pi} - c_{11} \right) = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n),$$

wo

$$(21) \quad f_2(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{13,94(n-1)}{8} - f_1(n) \right).$$

§ 5. Zusammenstellung der Formeln.

Die Formeln (14), (15), (18), (19), (20), (21) enthalten die Lösung des in der Einleitung gestellten Problems. Wir bringen sie jetzt in eine für die numerische Rechnung geeignete Gestalt.

Die Dichte des Kristalls ist

$$(22) \quad \rho = \frac{m_1 + m_2}{d} = 4 \frac{m_1 + m_2}{\delta^3}.$$

Ist N die Avogadro'sche Zahl, so sind die Atomgewichte

$$(23) \quad \mu_1 = N m_1, \quad \mu_2 = N m_2$$

und

$$(24) \quad F = e N = 2,90 \cdot 10^{14} \text{ E.S.E.}$$

ist die Faradaysche Konstante. Daher wird nach (14)

$$\omega^2 = \frac{e F^2}{4 \mu_1 \mu_2} f(n);$$

daraus folgt für die Wellenlänge

$$(25) \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi c}{F} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{e f(n)}}$$

mißt man sie in $\mu = 10^{-4} \text{ cm}$, so wird

$$(25') \quad \lambda = 13,0 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{e f(n)}}.$$

Die Elastizitätskonstanten haben den Faktor

$$(26) \quad \frac{e^2}{\delta^4} = e^2 \left(\frac{Nq}{4(\mu_1 + \mu_2)} \right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\sqrt{eFq}}{4(\mu_1 + \mu_2)} \right)^{\frac{4}{3}};$$

für $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ wird dieser:

$$(26') \quad \frac{e^2}{\delta^4} = 1,842 \cdot 10^{13} \left(\frac{q}{\mu_1 + \mu_2} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Mit Hilfe der Formel (9) kann man nun aus den gemessenen Werten der Kompressibilität den Abstoßungsexponenten n bestimmen¹⁾; man findet

$$(27) \quad n - 1 = \frac{9}{13,94 \pi} \cdot \frac{\delta^4}{e^2} = 3,505 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{q} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Die Elastizitätskonstanten ergeben sich aus (26') durch Multiplikation mit $f_1(n)$ und $f_2(n)$; es genügt, c_{11} anzugeben:

$$(28) \quad c_{11} = 1,842 \cdot 10^{13} \cdot \left(\frac{q}{\mu_1 + \mu_2} \right)^{\frac{4}{3}} f_1(n).$$

Ferner erhält man aus (9) und (18) die Relation:

$$(29) \quad \pi c_{11} = \frac{9 f_1(n)}{13,94 (n - 1)};$$

diese ist explizite unabhängig von der Wahl der Zahlenwerte für e und δ und wird von diesen nur insoweit beeinflusst, als sie in die Bestimmung von n aus (27) eingehen.

Zur Orientierung über den Verlauf der Summen S und C als Funktionen von n dient die folgende kleine Tabelle²⁾; der Bereich von n ist so gewählt, daß er die im folgenden vorkommenden Werte von n enthält.

Tabelle 1.

n	$S_1(n)$	$S_2(n)$	$S_1(n+2)$	$C_1(n+4)$	$C_2(n+4)$
7	6,231	1,149	6,065	2,028	0,1913
8	6,144	0,785	6,036	2,015	0,1314
9	6,065	0,544	6,020	2,007	0,0910
10	6,036	0,381	6,011	2,004	0,0636

1) Vgl. M. Born und A. Landé (a. a. O. Anm. 1, S. 1). Indem wir hier einen moderneren Wert für das elektrische Elementarquantum benutzen, fallen die numerischen Faktoren etwas anders aus als in der zitierten früheren Arbeit.

2) Die Tabelle ist von Fr. Dr. E. Bormann berechnet, die mich bei dieser Arbeit in liebenswürdiger Weise unterstützt hat.

Hieraus geht hervor, daß die Konstante β keinen sehr großen Einfluß auf die Funktionen $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ hat.

§ 6. Vergleich mit den Messungen.

Wir bestimmen zunächst n aus (27); die folgende Tabelle enthält die Kompressibilitäten nach Richards und Jones¹⁾ nebst Atomgewichten und Dichten und die daraus berechneten Werte von n .

Tabelle 2.

	μ_1	μ_2	ϱ	$\kappa_{\text{beob.}}$	n
NaCl	23,0	35,5	2,17	$4,1 \cdot 10^{-12}$	7,91
NaBr	23,0	79,9	3,01	5,1	8,63
NaJ	23,0	126,9	3,55	6,9	8,47
KCl	39,1	35,5	1,98	5,0	9,85
KBr	39,1	79,9	2,70	6,2	9,80
KJ	39,1	126,9	3,07	8,6	9,33
TlCl	204,0	35,5	7,02	4,7	9,25
TlBr	204,0	79,9	7,54	5,1	9,67
TlJ	204,0	126,9	7,06	6,7	9,84

Der Mittelwert der für n gefundenen Werte ist $n = 9,20$. Macht man die Annahme, daß n ganzzahlig sein soll, so wird man

$$n = 9$$

setzen, einen Wert, der auch durch theoretische Spekulationen über die Atomstruktur gestützt wird.²⁾

Auch die Konstanten λ und c_{11} wird man zunächst mit diesem Werte $n = 9$ berechnen. Dabei ist noch die Konstante β unbekannt; zum Zwecke einer ersten Übersicht über die Brauchbarkeit der Formeln wird man den naheliegenden Ansatz

$$\beta = 1$$

machen, der nach (6) bedeutet, daß für dieselbe Entfernung die Abstoßung zweier Atome verschiedener Art gleich ist dem arithmetischen Mittel der Abstoßung je zweier gleich-

1) Th. W. Richards und Gr. Jones, Journ. Amer. Chem. Soc. 31. S. 158. 1909. Zitiert nach W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, § 362, S. 720.

2) Vgl. M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. 20. S. 230. 1918 und A. Landé, ebenda, 21. S. 2. 1919.

artiger Atome. Für $n = 9$, $\beta = 1$ hat man nach (15) und (19) mit Benutzung der Tabelle 1:

$$f(9) = \frac{1}{3} \left(13,94 \frac{8 \cdot S_1(11)}{S_1(9) + S_2(9)} - 16\pi \right) = 17,10,$$

$$f_1(9) = 13,94 \cdot 11 \frac{C_1(13) + C_2(13)}{S_1(9) + S_2(9)} - 20,42 = 28,26.$$

Die Formeln (25'), (27), (28), (29) liefern nun:

$$(25') \quad \lambda = 3,14 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho}},$$

$$(27') \quad \kappa = 4,38 \cdot 10^{-14} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\varrho} \right)^{\frac{4}{3}},$$

$$(28') \quad c_{11} = 5,21 \cdot 10^{13} \left(\frac{\varrho}{\mu_1 + \mu_2} \right)^{\frac{4}{3}},$$

$$(29') \quad \kappa c_{11} = 2,28.$$

Die folgende Tabelle enthält die mit den Daten der Tab. 2 berechneten Werte von λ , κ , c_{11} . Zum Vergleich sind daneben eingetragen die Wellenlängen der Reststrahlen λ_R , soweit sie bekannt sind, die Kompressibilitäten $\kappa_{\text{beob.}}$ nach Richards und Jones (vgl. Tab. 2) und die Konstanten $c_{11\text{beob.}}$ nach Voigt¹⁾, die leider nur für zwei Kristalle vorliegen, endlich das Produkt $\kappa c_{11\text{beob.}}$ aus den gemessenen Werten.

Tabelle 3.

	$\lambda_{\text{ber.}}$	λ_R	$10^{12} \kappa_{\text{ber.}}$	$10^{12} \kappa_{\text{beob.}}$	$10^{-11} c_{11\text{ber.}}$	$10^{-11} c_{11\text{beob.}}$	$\kappa c_{11\text{beob.}}$
NaCl	60,9	52,0	3,54	4,1	6,44	4,68	1,92
NaBr	77,5	—	4,86	5,1	4,69	—	—
NaJ	90,0	—	6,44	6,9	3,54	—	—
KCl	83,0	63,4	5,53	5,0	4,12	3,68	1,84
KBr	107,0	82,6	6,82	6,2	3,35	—	—
KJ	126,1	94,1	8,96	8,6	2,54	—	—
TlCl	101,0	91,6	4,85	4,7	4,71	—	—
TlBr	146,0	117,0	5,53	5,1	4,12	—	—
TlJ	190,0	151,8	7,40	6,7	3,08	—	—

Die Wellenlängen der Reststrahlen (Maxima des Reflexionsvermögens) entsprechen wegen der Absorption nicht genau den

1) W. Voigt, Kristallphysik, § 373, S. 744. Die Angaben Voigts sind durch Multiplikation mit 981 in C.G.S.-Einheiten umgerechnet.

Eigenschwingungen; vielmehr sind die Wellenlängen der letzteren merklich länger. Für Steinsalz haben Rubens und Nichols¹⁾ aus der Dispersionskurve die Eigenschwingung $\lambda = 56,1$ abgeleitet; dieser Wert liegt dem berechneten $\lambda = 60,9$ ziemlich nahe. Für die übrigen Salze ist die Übereinstimmung schlechter, und zwar ist die Abweichung immer im selben Sinne und im großen und ganzen um so größer, je höhere Atomnummern die den Kristall bildenden Atome tragen. Das muß man wohl so verstehen, daß die der Theorie zugrunde liegende Annahme, die Atome seien punktförmige Kraftzentra, um so schlechter erfüllt ist, je größer die den Kristall bildenden Atome sind; denn dann werden Drehungen und Deformationen der Atome auf die Eigenfrequenz Einfluß gewinnen. Die Theorie stellt also den idealen Grenzfall sehr kleiner Atome dar.

Die Übereinstimmung der Elastizitätskonstanten c_{11} muß von demselben Gesichtspunkt aus als befriedigend bezeichnet werden. Auch ist zu berücksichtigen, daß die Sicherheit der gemessenen Werte nicht sehr groß ist.²⁾ Für das Produkt κc_{11} folgen aus den Beobachtungen Werte, die etwas kleiner sind als die theoretische Zahl 2,28. Es wäre sehr zu wünschen, daß durch neue Bestimmungen der Elastizitätskonstanten eine umfangreichere Prüfung der Theorie ermöglicht würde.

Man kann nun versuchen, auf zwei Weisen den Anschluß an die Messungen zu verbessern, ohne den Rahmen der hier gegebenen Theorie zu verlassen. Einmal kann man nämlich, statt mit $n = 9$ zu rechnen, die in Tab. 2 angegebenen n -Werte benutzen, die sich aus der Kompressibilität für jeden Kristall ergeben; man findet, daß das bei einigen Kristallen hilft, bei anderen schadet. Sodann kann man versuchen, ob sich die

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann. d. Phys. 60. S. 452. 1897.

2) Voigt (Lehrbuch der Kristallphysik, § 372, S. 742) hebt hervor, daß sich für KCl (Sylvin) aus den von ihm gemessenen Werten von c_{11} und c_{22} die Kompressibilität $\kappa = 7,38$ ergibt, während nach den direkten Messungen von Richards und Jones $\kappa = 5,0$ sein soll. Das Kristallmaterial scheint nicht einheitlich zu sein. Unter diesen Umständen ist es auch überflüssig, die gemessenen Werte auf den absoluten Nullpunkt zu reduzieren, für den die Theorie eigentlich gilt; übrigens wird diese Ungenauigkeit zum größten Teil dadurch kompensiert, daß in die Formeln nicht die Dichte beim absoluten Nullpunkt, sondern bei normalen Temperaturen eingesetzt wird.

artiger Atome. Für $n = 9$, $\beta = 1$ hat man nach (15) und (19) mit Benutzung der Tabelle 1:

$$f(9) = \frac{1}{3} \left(13,94 \frac{8 \cdot S_1(11)}{S_1(9) + S_2(9)} - 16\pi \right) = 17,10,$$

$$f_1(9) = 13,94 \cdot 11 \frac{C_1(13) + C_2(13)}{S_1(9) + S_2(9)} - 20,42 = 28,26.$$

Die Formeln (25'), (27), (28), (29) liefern nun:

$$(25') \quad \lambda = 3,14 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\rho}},$$

$$(27') \quad \kappa = 4,38 \cdot 10^{-14} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho} \right)^{\frac{4}{3}},$$

$$(28') \quad c_{11} = 5,21 \cdot 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_1 + \mu_2} \right)^{\frac{4}{3}},$$

$$(29') \quad \kappa c_{11} = 2,28.$$

Die folgende Tabelle enthält die mit den Daten der Tab. 2 berechneten Werte von λ , κ , c_{11} . Zum Vergleich sind daneben eingetragen die Wellenlängen der Reststrahlen λ_R , soweit sie bekannt sind, die Kompressibilitäten $\kappa_{\text{beob.}}$ nach Richards und Jones (vgl. Tab. 2) und die Konstanten $c_{11\text{beob.}}$ nach Voigt¹⁾, die leider nur für zwei Kristalle vorliegen, endlich das Produkt $\kappa c_{11\text{beob.}}$ aus den gemessenen Werten.

Tabelle 3.

	$\lambda_{\text{ber.}}$	λ_R	$10^{12} \kappa_{\text{ber.}}$	$10^{12} \kappa_{\text{beob.}}$	$10^{-11} c_{11\text{ber.}}$	$10^{-11} c_{11\text{beob.}}$	$\kappa c_{11\text{beob.}}$
NaCl	60,9	52,0	3,54	4,1	6,44	4,68	1,92
NaBr	77,5	—	4,86	5,1	4,69	—	—
NaJ	90,0	—	6,44	6,9	3,54	—	—
KCl	83,0	63,4	5,53	5,0	4,12	3,68	1,84
KBr	107,0	82,6	6,82	6,2	3,35	—	—
KJ	126,1	94,1	8,96	8,6	2,54	—	—
TlCl	101,0	91,6	4,85	4,7	4,71	—	—
TlBr	146,0	117,0	5,53	5,1	4,12	—	—
TlJ	190,0	151,8	7,40	6,7	3,08	—	—

Die Wellenlängen der Reststrahlen (Maxima des Reflexionsvermögens) entsprechen wegen der Absorption nicht genau den

1) W. Voigt, Kristallphysik, § 373, S. 744. Die Angaben Voigts sind durch Multiplikation mit 981 in C.G.S.-Einheiten umgerechnet.

Eigenschwingungen; vielmehr sind die Wellenlängen der letzteren merklich länger. Für Steinsalz haben Rubens und Nichols¹⁾ aus der Dispersionskurve die Eigenschwingung $\lambda = 56,1$ abgeleitet; dieser Wert liegt dem berechneten $\lambda = 60,9$ ziemlich nahe. Für die übrigen Salze ist die Übereinstimmung schlechter, und zwar ist die Abweichung immer im selben Sinne und im großen und ganzen um so größer, je höhere Atomnummern die den Kristall bildenden Atome tragen. Das muß man wohl so verstehen, daß die der Theorie zugrunde liegende Annahme, die Atome seien punktförmige Kraftzentra, um so schlechter erfüllt ist, je größer die den Kristall bildenden Atome sind; denn dann werden Drehungen und Deformationen der Atome auf die Eigenfrequenz Einfluß gewinnen. Die Theorie stellt also den idealen Grenzfall sehr kleiner Atome dar.

Die Übereinstimmung der Elastizitätskonstanten c_{11} muß von demselben Gesichtspunkt aus als befriedigend bezeichnet werden. Auch ist zu berücksichtigen, daß die Sicherheit der gemessenen Werte nicht sehr groß ist.²⁾ Für das Produkt κc_{11} folgen aus den Beobachtungen Werte, die etwas kleiner sind als die theoretische Zahl 2,28. Es wäre sehr zu wünschen, daß durch neue Bestimmungen der Elastizitätskonstanten eine umfangreichere Prüfung der Theorie ermöglicht würde.

Man kann nun versuchen, auf zwei Weisen den Anschluß an die Messungen zu verbessern, ohne den Rahmen der hier gegebenen Theorie zu verlassen. Einmal kann man nämlich, statt mit $n = 9$ zu rechnen, die in Tab. 2 angegebenen n -Werte benutzen, die sich aus der Kompressibilität für jeden Kristall ergeben; man findet, daß das bei einigen Kristallen hilft, bei anderen schadet. Sodann kann man versuchen, ob sich die

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann. d. Phys. 60. S. 452. 1897.

2) Voigt (Lehrbuch der Kristallphysik, § 372, S. 742) hebt hervor, daß sich für KCl (Sylvin) aus den von ihm gemessenen Werten von c_{11} und c_{22} die Kompressibilität $\kappa = 7,38$ ergibt, während nach den direkten Messungen von Richards und Jones $\kappa = 5,0$ sein soll. Das Kristallmaterial scheint nicht einheitlich zu sein. Unter diesen Umständen ist es auch überflüssig, die gemessenen Werte auf den absoluten Nullpunkt zu reduzieren, für den die Theorie eigentlich gilt; übrigens wird diese Ungenauigkeit zum größten Teil dadurch kompensiert, daß in die Formeln nicht die Dichte beim absoluten Nullpunkt, sondern bei normalen Temperaturen eingesetzt wird.

Konstante β so bestimmen läßt, daß die Übereinstimmung mit den Beobachtungen verbessert wird; es zeigt sich, daß auch das nicht zum Ziel führt, denn wenn man für die Kristalle NaCl und KCl durch geeignete Wahl von β die Übereinstimmung der Wellenlängen λ verbessert, wird die Abweichung der Elastizitätskonstanten c_{11} größer. In der vorliegenden rohen Form ist also die Theorie nicht geeignet, Aufschluß über das Verhältnis der Kräfte zwischen gleichartigen und ungleichartigen Atomen zu geben. Der Grund ist wohl, daß die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome alle feineren Zusammenhänge verdeckt.¹⁾

Zum Schlusse vergleichen wir die Formel (25') für die Wellenlänge der ultraroten Eigenschwingungen mit der in der Einleitung erwähnten Relation von Dehlinger

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{d},$$

die man auch in der Form

$$\lambda = \frac{4\pi c}{f} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 K}{16\pi q}}, \quad K = \varepsilon - \varepsilon_0$$

schreiben kann; sie wäre also mit der neuen Formel (25) identisch, wenn $K = 16\pi/f(n)$ wäre. Dabei ist K die Konstante der Dispersionsformel

$$n^2 = n_0^2 + \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

die den Einfluß der ultraroten Eigenfrequenz ω_0 auf den Brechungsindex n darstellt. Es ist also $K = \varepsilon - \varepsilon_0$, wo ε die statische Dielektrizitätskonstante, d. h. der Wert von n^2 für $\omega = 0$, und $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ der Wert des Brechungsindex im Ultraroten vor der langwelligen Eigenfrequenz ist. Es wurde damals gezeigt, daß diese Formel zwar für die Salze NaCl, KCl, KBr, KJ einigermaßen stimmt, daß sie aber für die

1) W. Voigt hat kürzlich (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) den Einfluß der Drehungen der Atome auf die Elastizitätskonstanten untersucht; in einigen Fällen konnte er dabei zu Schätzungen einer β analogen Größe gelangen. Man wird suchen müssen, diese Überlegungen mit der hier gegebenen Theorie zu verschmelzen.

Thallium- und Silbersalze¹⁾ unter der Annahme einfach geladener Ionen vollständig versagt (vgl. Einleitung, S. 89, insbesondere Anm. 4, S. 89). Die neue Formel (25) liefert weitaus bessere Werte für λ , obwohl ihre Begründung viel spekulativer ist, als die der Formel von Dehlinger. An dem Versagen dieser kann also nicht, wie ich früher glaubte²⁾, die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome schuld sein, denn diese macht auch die vorliegende Theorie; es scheint mir vielmehr, daß nur die Bestimmung von K aus der empirischen Dispersionskurve den Fehler bewirken kann. Einmal ist die Wahl des Wertes $\epsilon_0 = n_0^2$ überhaupt sehr willkürlich; sodann handelt es sich um stark gedämpfte Schwingungen, was bei dem Ansatz der Dispersionsformel nicht zum Ausdruck gebracht ist. Jedenfalls ist die neue, direkte Berechnung der ultraroten Frequenzen aus den Atomkräften erfolgreicher als die anscheinend so hypothesenfreie aus dem Verlaufe der Dispersion.

Anhang.

Berechnung der elektrischen Wechselwirkungen zwischen den Atomen.

Eine ausführliche Theorie der elektrodynamischen Vorgänge in einem Gitter habe ich a. a. O.³⁾ gegeben. Für die Berechnung der Wechselwirkungen hat man die Fälle zu unterscheiden, ob der Mittelwert der elektrischen Feldstärke über eine Zelle des Gitters verschwindet oder nicht. Im ersten Falle hat man elastische (akustische und thermische) Vorgänge, im zweiten Falle eigentlich elektromagnetische (optische). Im ersten Falle kann man mit gewöhnlichen elektrostatischen (Coulombschen) Kräften rechnen; im zweiten Falle muß man die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der

1) Die Silbersalze verhalten sich gegenüber der neuen Theorie merkwürdig; die Formel (27) liefert mit $n = 9$ viel zu große Kompressibilitäten, dagegen stimmen die mit $n = 9$ aus (25') berechneten Wellenlängen gut mit den Reststrahlen überein. Die amorphe Struktur dieser Substanzen mag vielleicht erklären, daß sie sich elastisch anomal verhalten, während ihre optischen Eigenschaften unserer Theorie entsprechen.

2) M. Born, D.K., zit. Anm. 1, S. 89.

3) D. K., 2. Teil, § 22—31.

elektromagnetischen Störungen in Rechnung setzen und die Kräfte als Lösungen der Wellengleichung bestimmen.

Betrachten wir zunächst den Fall der optischen Vorgänge.

Die an den Partikeln angreifenden elektrischen Kräfte leiten sich aus einem Hertzschen Vektor ab, der der Wellengleichung genügt; dieser besteht aus zwei Anteilen, die von den positiven und negativen Ionen herrühren. Die auf ein negatives Ion wirkende Kraft in der x -Richtung ist gleich dem Werte von $-e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ an der Stelle des Ions, wobei φ die von den positiven Ionen herrührende Wirkung darstellt; φ genügt der Wellengleichung und wird an allen positiven Partikeln unendlich wie $e r^{-1}$. Entwickelt man nun unter der Annahme, daß der Mittelwert des Feldes über eine Zelle nicht verschwindet, nach Potenzen der reziproken Wellenlänge, so erhält man in erster Näherung (unendlich lange Wellen) für φ die Differentialgleichung

$$(a) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi e}{D}.$$

Da nun aus Symmetriegründen in jedem negativen Gitterpunkte

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

ist, so folgt für die Kraft auf ein Ion

$$(b) \quad -e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi e^2}{3D};$$

da D die Kraft auf die Ionen einer Art in der Volumeneinheit bedeutet, so ist der gefundene Wert der elektrische Anteil zu $D \Delta$, wie im Text S. 95 angegeben.¹⁾

Bei der Berechnung der elektrischen Beiträge zu den Elastizitätskonstanten braucht die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt zu werden. Es handelt sich also um eine rein elektrostatische Aufgabe.

Eine ebenso elegante wie weitreichende Methode zur Berechnung der Potentiale unendlicher Gitter hat Madelung²⁾ angegeben. Er hat danach selbst den Wert der potentiellen Energie eines Gitters vom Typus des NaCl pro Elementarwürfel ermittelt; A. Landé und ich haben diesen Wert eben-

1) Vgl. auch D. K., 2. Teil, § 31, S. 98.

2) A. a. O. S. 6, Anm. 2.

falls berechnet und benutzt.¹⁾ Für die Kantenlänge 1 (gerechnet zwischen zwei Atomen der gleichen Art) hat diese Energie den auf S. 92, Formel (4) mitgeteilten Wert

$$(c) \quad a = 13,94 e^2.$$

Wir haben hier also nur noch den Beitrag der elektrischen Kräfte zu der Elastizitätskonstanten c_{11} zu bestimmen. Nach der Gittertheorie²⁾ beträgt dieser:

$$(d) \quad c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2A} \sum_k \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^2 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^2} \right) r_{kk'}^{(l)} \cdot z_{kk'}^{(l)},$$

wobei

$$(e) \quad \varphi_{kk'}^{(l)} = (-1)^{l_1+l_2+l_3} \frac{e^2}{r_{kk'}^{(l)}}$$

das elektrostatische Potential zwischen zwei Gitterpunkten ist. Nun hat offenbar die Summe

$$(f) \quad C = \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^2 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^2} \right) r_{kk'}^{(l)} \cdot z_{kk'}^{(l)}$$

in den beiden Gitterpunkten $k=1$ und $k=2$ einer Zelle denselben Wert; daher liefert die Summation nach k einfach den Faktor 2. Beziehen wir außerdem C auf ein Gitter mit der Ionenladung 1, bei dem benachbarte Atome verschiedener Art den Abstand 1 haben, so wird

$$(g) \quad c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2A} \cdot 2 \cdot \frac{e^2}{\delta/2} C = \frac{2e^2}{\delta A} C = \frac{8e^2}{\delta^4} C.$$

Es bleibt also nur noch die numerische Konstante C zu berechnen. Wir setzen die Summe C aus den Beiträgen zusammen, die die Netzebenen $z = \text{konst.}$ liefern. Da die Ebene $z = 0$ nichts zu der Summe beiträgt, kann man schreiben:

$$C = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} z^2 \right)_{0,0,p} \cdot (-1)^p;$$

dabei ist Φ das elektrostatische Potential der Netzebene $z=0$ in einem Aufpunkte x, y, z , und es sind $x=0, y=0$ und für z der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen p zu setzen.

1) A. a. O. S. 6, Anm. 1.

2) Vgl. D. K. Formeln (26), (42), (51), (57).

Nach Madelung¹⁾ ist das Potential der Netzebene $z=0$ im Punkte x, y, z :

$$\Phi = 8 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{\substack{n \\ \text{ungerade}}} \frac{e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot |z|}}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos m \pi x \cos n \pi y.$$

Daher wird

$$(h) \quad C = 16 \pi^2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p^2 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{\substack{n \\ \text{ungerade}}} \sqrt{m^2+n^2} e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot p}.$$

Die Reihe konvergiert außerordentlich rasch; um C genauer als auf 10^{-6} zu erhalten, genügt es, die Indizes $m, n = 1, 3$ und $p = 1, 2$ zu berücksichtigen. Man findet

$$(i) \quad C = -2,644.$$

Setzt man das in (g) ein, so erhält man den auf S. 96 benutzten Wert

$$(k) \quad c_{11}^{(e)} = -20,42 \frac{e^2}{\delta^4}.$$

1) E. Madelung (a. a. O. S. 6, Anm. 2). Die angegebene Formel findet sich auf S. 532 unter 8. Das Feld eines gemischten (flächenzentrierten) rechtwinkligen ebenen Punktgitters; man hat $a = b = 2$, also $k_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2}$, und $E = 1$ zu setzen.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

**7. Der Effekt des elektrischen Feldes
auf Linien des Argons und des Sauerstoffs¹⁾;
von E. Böttcher und F. Tuczek.**

1. *Problemstellung.* Nach den Vorstellungen Starks wird die von einem äußeren Feld herrührende elektrische Kraft im Innern des Atoms durch seine an der Peripherie sitzenden, lose gebundenen Elektronen geschwächt, indem diese sich durch das äußere Feld verschieben. Die Wirkung eines Feldes auf die mehr im Innern liegenden Serienelektronen muß demnach um so geringer sein, je mehr Elektronen das Atom überhaupt enthält, d. h. je größer das Atomgewicht ist, und zweitens je mehr leicht verschiebbare Elektronen an der Peripherie des Atoms vorhanden sind. Als solche sind aber die Valenzelektronen zu betrachten. Hiernach hat man also eine Abnahme des elektrischen Effektes mit zunehmender Valenzzahl zu erwarten. In der Tat konnten Stark und Hardtke²⁾ durch Vergleich des elektrischen Effektes auf entsprechende Glieder der diffusen Nebenserie von Na, Cu, Ag, und Al nachweisen, daß die Verschiebung für die ersten drei einwertigen Elemente ungefähr gleich, für das dreiwertige Al aber erheblich geringer ist.

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, wie sich einmal die Edelgase und zweitens Elemente mit der Valenzzahl 2 verhalten. Von den Edelgasen werden bekanntlich die Linien des He sehr stark zerlegt, beim Neon fand Nyquist³⁾, dessen Arbeit uns leider nicht zugänglich war, einen Effekt des elektrischen Feldes. Wir untersuchten das Argon. Es bestand die Möglichkeit, daß hier eine der ersten oder diffusen Duplet-Nebenserie der oben aufgeführten, von Stark und

1) Die vorliegende Untersuchung ist mit Unterstützung der Jagor-Stiftung ausgeführt worden.

2) Stark u. Hardtke, Ann. d. Phys. 38. S. 712. 1919.

3) Nyquist, Phys. Rev. (II). S. 226. 1917.

Hardtke untersuchten Elemente entsprechende Serie gefunden und es so gelingen würde, durch den Vergleich der Verschiebungen bei Argon und jenen Elementen eine weitere Stütze der Starkschen Theorie zu liefern. Es mag vorweggenommen werden, daß keine solche Serie auftrat, und wir überhaupt keine Verschiebung oder Zerlegung von Argonlinien feststellen konnten.

Als zweiwertiges Element wählten wir den Sauerstoff. Als zweiter Gesichtspunkt für diese Wahl war maßgebend, daß Sauerstoff ein Bogen- und ein Funkenspektrum besitzt, denen nach Stark verschiedene Träger, nämlich das O^+ -Atomion für das Bogen- und das O^{++} -Atomion für das Funkenspektrum zukommen. In Analogie zu anderen Elementen ist auch für Sauerstoff zu erwarten, daß die Bogenlinien stärker beeinflußt werden.

2. *Methode.* Die Untersuchungen wurden nach der Methode der ersten Kathodenschicht gemacht, und zwar wurde für Argon dieselbe Röhre verwendet, die schon früher von Stark, Hardtke und Liebert¹⁾ beschrieben ist, für Sauerstoff eine Röhre aus gewöhnlichem Glas von 4 mm Innendurchmesser mit gut anschließender Aluminiumkathode. Es wurde mit Gleichstrom gearbeitet, die Stromstärke betrug 1–2 Milliampere, die Entladungsspannung bei Argon etwa 4400, bei Sauerstoff 3400 Volt. Die Feldstärke ließ sich aus der Zerlegung der Wasserstofflinien, die im Argonspektrum auftraten, im Maximum zu etwa 26000 V/cm bestimmen. Der Raum vor der Kathode wurde in der üblichen Weise durch ein Tessar auf den Spalt eines Gitterspektrographen abgebildet, der schon früher beschrieben ist²⁾, und dessen Dispersion 11 bis 16 Å/mm betrug. Ein Wollastonprisma zwischen Röhre und Tessar trennte p- und s-Komponenten.

3. *Ergebnisse.* a) Argonlinien. Tab. I enthält die Wellenlängen der von uns untersuchten Argonlinien. Eine Zerlegung oder Schrägstellung konnte nicht aufgefunden werden.

b) Sauerstoff-Funkenlinien. An den in Tab. II aufgeführten Sauerstoff-Funkenlinien fanden wir ebenfalls keine Wirkung des Feldes.

1) J. Stark, O. Hardtke und G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 569. 1918.

2) Ann. d. Phys. 48. S. 195. 1915.

Tabelle I.

1. Rotes Argonspektrum nach Eder u. Valenta.		2. Blaues Argonspektrum nach Eder u. Valenta.			
Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4522,49	3	4847,94	2	4481,99	7
4510,95	5	4806,17	4	4426,16	8
4385,42	5	4765,04	5	4400,25	8
4300,18	5	4736,03	3	4379,79	7
4272,27	10	4727,00	5	4371,46	6
4266,41	9	4658,04	5	4348,22	10
4259,42	9	4637,35	4	4331,31	4
4200,76	9	4609,73	10	4277,65	10
4198,42	8	4590,05	8	4228,57	5
4164,36	5	4575,53	8	4178,50	3
4158,63	9	4563,87	7	4158,65	2
4044,56	5	4545,26	9	4131,91	8
		4503,15	2	4104,11	5
		4498,68	2	4072,16	6

Tabelle II.

O-Funkenlinien (nach Neovis).

Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4710,1	2	4351,4	mehrfach
4705,6	3	4345,4	mehrfach
4699,4	3	4337,0	4
4676,6	6	4319,6	6
4661,6	6	4317,1	6
4651,0	10	4303,5	4
4638,9	6	4293,5	6
4609,4	6	4253,7	5
4596,3	9	4190,0	7
4591,0	10	4185,5	7
4469,4	3	4153,6	2
4465,3	4	4119,5	6
4452,2	4	4088,9	4
4443,0	3	4085,2	4
4417,2	10	4076,2	8
4415,0	8		

c) Sauerstoff-Bogenlinien. In Tab. III sind die Ergebnisse bezüglich der von uns untersuchten Bogenlinien zusammengestellt. Von der Duplethauptserie erschien in unseren Spektrogrammen nur das 2. Glied, $\lambda = 4368,5$, das keinen Effekt zeigt, von der Triplethauptserie nur das 3. Glied, $\lambda = 3947,8$, das aber so dicht an der intensiven Al-Linie 3944 liegt, daß wir keine bestimmten Aussagen über seine Beeinflussung machen können. Das 3. bis 7. Glied der I. Tripletnebenserie zeigt eine

Verschiebung nach Rot, die mit wachsender Gliednummer stark zunimmt, wie es bei allen bisher untersuchten Serien der Fall ist. Weitere Glieder waren auf unseren Spektrogrammen nicht zu erkennen.

Tabelle III.
O-Bogenlinien (nach Runge und Paschen).

Gliednummer	Wellenlänge	Intensität	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion Å/mm
a) Duplethauptserie.				
2	4368,466	10	nicht merklich	16
b) Triplethauptserie.				
3	3947,759 3947,661 3947,480	10	?	16,5
c) I. Tripletnebenserie.				
3	5330,835 5329,774 5329,162	10	+ 0,71	11,9
4	4968,94 4968,04 4967,58	5	+ 2,0	12,0
5	4773,94 4773,07 4772,72	5	+ 5,4	14,0
6	4655,54 4654,74 4654,41	8	+ 7,6	14,6
7	4577,84 4576,97	1	+ 9,3	16,0
d) II. Tripletnebenserie.				
2	5437,041 5435,968 5435,371	7	nicht merklich	10,0
3	5020,31 5019,52 5018,96	3	"	11,5
4	4803,18 4802,38 4801,98	5	"	13,3

d) Neue Linien des Sauerstoffs. Wir beobachteten zum erstenmal die in Tab. IV angegebenen Linien, die nur im elektrischen Feld auftreten. Die Bestimmung der Wellenlängen kann nicht auf große Genauigkeit Anspruch machen, eben weil die Intensität mit abnehmendem Feld dem Wert Null zustrebt. Die Intensität der s -Komponenten war so klein,

daß ihre Verschiebung nicht gemessen werden konnte; die Verschiebung ist aber etwa ebenso groß wie die der p -Komponenten. Die Eigenschaften der neuen Linien sind im folgenden kurz zusammengestellt:

Tabelle IV.
Neue O-Linien.

Wellenlänge	Intensität (Schätzung)	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion
4846	1	- 1,4	13,9
4743	2	- 2,1	14,0
4634	3	- 3,5	15,0
4559	4	- 4,5	16,0

1. Die Linien haben nur im elektrischen Feld merkliche Intensität.

2. Sie werden durch das Feld nach Violett verschoben im Gegensatz zur I. Tripletnebenserie).

3. Die Linien rücken bei kleineren Wellenlängen näher aneinander und an die Glieder der I. Tripletnebenserie.

4. Die Intensität nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu (im Gegensatz zum gewöhnlichen Verhalten von Serienlinien). Die Reihe bricht mit dem intensivsten Gliede ab, ohne daß eine Andeutung eines weiteren, weniger intensiven Gliedes zu bemerken wäre. Dies Verhalten ist außerordentlich bemerkenswert.

5. Die p -Komponenten sind erheblich intensiver als die s -Komponenten.

6. Mit wachsender Feldstärke scheint die Intensität der Linien mit größeren Wellenlängen schneller zu wachsen als die der Linien mit kleineren Wellenlängen. (Ebenso verhalten sich die He-Serien, die nur im elektrischen Feld erscheinen.¹⁾)

7. Die Verschiebung hat etwa die gleiche Größe wie bei der I. Tripletnebenserie des Sauerstoffs und bei der fast scharfen He-II-Haupt- und Nebenserie.²⁾ Mit der letzteren haben die neuen Linien außer den unter 1., 2., 4., 6. und 7. aufgeführten Punkten auch die Eigenschaft 5. gemeinsam, die aber bei den

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 56. S. 577. 1918.

2) G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 589. 1918.

O-Linien viel stärker ausgeprägt ist. Wir konnten dies feststellen durch Vergleich mit einer Platte, die uns Herr Prof. Stark zur Verfügung stellte, und die er zur Untersuchung des Spektrums von Silber in Helium aufgenommen hatte. Nach den obigen Feststellungen ist man wohl berechtigt, die von uns gefundenen O-Linien als eine zur I. Tripletnebenserie gehörige fast scharfe Nebenserie anzusprechen.

Herrn Prof. J. Stark verdanken wir die Anregung zu dieser Arbeit und ihre rege Förderung.

Greifswald, Physikalisches Institut, Juli 1919.

(Eingegangen 5. August 1919.)
